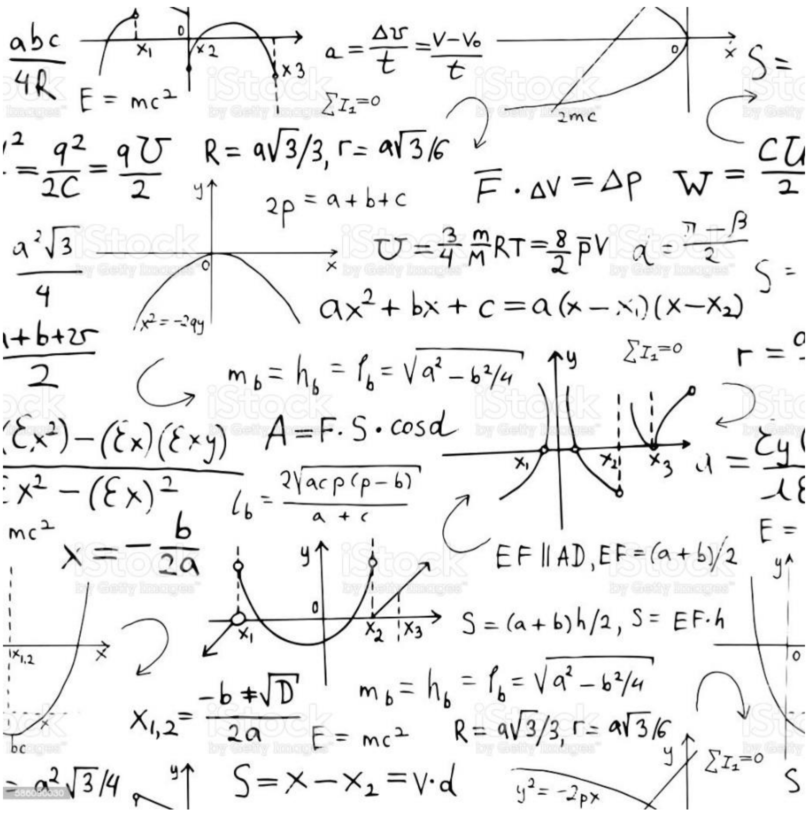
GARA DI FINE ANNO (31/05/2021)

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda che occorre sempre e comunque compilare le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale a x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime 4 cifre a partire da sinistra.
- Se la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \sqrt{3} = 1{,}73 \qquad \sqrt{5} = 2{,}24 \qquad \pi = 3{,}14$$



Auguriamo una buona estate a tutti, con l'augurio che, prossimamente, si possa tornare alla normalità. Con l'augurio che si possa tornare a fare matematica in presenza, continuando a conoscere gente che condivide i nostri stessi interessi e divertirsi, tutti insieme.

Buon divertimento!

A cura di:

Campigotto Sandro	Congedo Gabriele	Lauretti Paride	Monteduro Lorenzo	Salicandro Matteo
ISIS Magrini-Marchetti	LS Banzi	LS De Giorgi	LS De Giorgi	IISS Majorana
Gemona del Friuli	Lecce	Lecce	Lecce	Brindisi

1. LE RADICI UNA DIETRO L'ALTRA Matteo Salicandro

Quanto vale $\sqrt{2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1}+\sqrt{3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2}+\cdots+\sqrt{2021^2+2020^2-2\cdot 2021\cdot 2020}$?

2. A DUE A DUE Matteo Salicandro

Consideriamo l'equazione $n^3-3n^2+2n=m^2$, soddisfatta da un certo numero di coppie ordinate di interi (m,n). Per ciascuna coppia si calcoli il valore di $m+n$. Che risultato si ottiene?
[Se si ritiene che l'equazione abbia infinite soluzioni, si dia come risposta 9999. Se si ritiene che l'equazione non abbia soluzione, si dia come risposta 0000.]

3. CIRCOCENTRO SULLA BISETTRICE Matteo Salicandro

Sia ABC un triangolo acutangolo in cui $\widehat{ABC}=63°$. Sia T il punto sul lato AC tale che $CB=CT$ e sia M il punto medio di BT. Sapendo che il circocentro del triangolo BMC giace sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$, quanto misura in gradi l'angolo $\widehat{BAC}$?

4. ESTIVO Matteo Salicandro

Diciamo che un numero intero positivo $10000\le n\le 99999$ è estivo se verifica le seguenti proprietà:

- Per ogni $i\le 5$ dispari, si ha che, per ogni blocco di i cifre consecutive di n, la somma delle cifre appartenenti a quel blocco è dispari.
- Per ogni $i\le 5$ pari, si ha che, per ogni blocco di i cifre consecutive di n, la somma delle cifre appartenenti a quel blocco è pari.

Quanti sono i numeri estivi?

5. EVVIVA IL RISPARMIO! Matteo Salicandro

A Matelandia circola l'Eu(le)ro, una valuta strana abbreviata con il simbolo ∈.
Giacomo possiede tre salvadanai: ciascuno di essi contiene 6 monete, ciascuna di queste monete ha come valore $1\in,2\in,\ldots,6\in$.
Giacomo vuole acquistare una vacanza last-minute, che costa un certo numero intero di ∈.
Quindi, senza pensarci due volte, Giacomo rompe i tre salvadanai e preleva una moneta a caso, senza pensarci, da ciascun salvadanaio.
Poi dichiara: "Mi sento tranquillo, perché anche se ho fatto l'estrazione in maniera casuale, è strettamente più probabile che io riesca a pagare la vacanza (ed eventualmente ricevere resto), piuttosto che il contrario."
Quanto può costare al massimo la vacanza scelta da Giacomo?

6. DISUGUAGLIANZE CICLICHE Matteo Salicandro

Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico (dove i vertici A,B,C,D sono in senso orario) in cui vengono rispettate le disuguaglianze $DA^2+AB^2\le DC^2+BC^2\le DB^2$. Supponiamo che valga inoltre $DA=10\sqrt{3},AB=10$. Quanto può valere al massimo l'area del quadrilatero $ABCD$?

7. SEMPRE INTERO Matteo Salicandro

Sia $n>1$ un intero positivo tale che $\sqrt[2]{2n},\sqrt[3]{3n},\sqrt[5]{5n}$ siano tutti numeri interi. Quanti sono come minimo i divisori interi positivi di n?

8. IL LATO IGNOTO E INTERO Matteo Salicandro

Nel triangolo ABC si ha $AB=52$. Sia K il punto sul lato BC tale che AK sia bisettrice di $\widehat{BAC}$. L'asse del segmento AK interseca il lato AB nel punto L e detta P l'intersezione tra le rette AK e CL si ha che l'angolo $\widehat{APB}$ è retto. Sapendo che i lati di ABC hanno tutti misura intera, stabilire quanto può valere al massimo il lato BC.

9. COPPIE DI INTERI POSITIVI Matteo Salicandro

Per quante coppie ordinate (a,b) di interi positivi si ha che a^2b è un divisore di 7^{10}?

10. UN MAZZO COSI' Gabriele Congedo

Antonio ha un mazzo formato da 2021 carte numerate ordinate in numero crescente da 1 a 2021, dove la carta che si trova in fondo è la numero 1 e la carta in cima è la numero 2021. Ad ogni mossa, Antonio rimuove la carta in fondo e la carta in cima e le rimette, nello stesso ordine in cui stavano prima, in cima al mazzo. Per esempio, se la carta in cima fosse A e la carta in fondo fosse B, le due carte in cima al mazzo sarebbero A e B, in questo ordine. Quale numero si trova sulla seconda carta dopo 2100 mosse?

11. CHE COLPO! Matteo Salicandro

Un ladro ha rubato due gemme preziose presso una gioielleria: esse hanno come forma due solidi, una piramide avente come base un poligono regolare e un prisma avente anch'esso come basi due poligoni regolari identici.
Il ladro è consapevole di aver fatto un bel colpo perché in ciascuno dei vertici delle gemme è presente un minuscolo diamante, e lungo ogni spigolo delle gemme è presente un filo d'oro. Sapendo che il ladro ha con sé esattamente 167 diamanti e 284 fili d'oro, detto p il numero di vertici della piramide e q il numero dei vertici del prisma, si dia come risposta pq.

12. L'ISOLA TROPICALE Matteo Salicandro

Su un'isola tropicale vi è un enorme foresta rappresentata da una griglia $50 \text{x} 50$.
In ognuno dei 2500 quadrati della griglia può essere piantato uno e un solo albero che può essere una palma da cocco (tutte le palme sono identiche) o un banano (tutti i banani sono identici); a condizione che in ogni riga e in ogni colonna della griglia siano piantati esattamente 49 alberi.
Detto M il numero di modi in cui la foresta può essere riempita di alberi, si determini l'esponente della più grande potenza di 2 che divide M.

13. SOMMATORIA PARECCHIO LUNGA Lorenzo Monteduro

Per ogni intero positivo n chiamiamo:

$$f(n) = 7^0 \cdot 2^n + 7^1 \cdot 2^{n-1} + 7^2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + 7^{n-1} \cdot 2^1 + 7^n \cdot 2^0$$

Per quanti interi positivi $n \leq 2021$ accade che 25 è un divisore di $f(n)$?

14. SULL'ORLO DEL FALLIMENTO Gabriele Congedo

Una famosa azienda produttrice di smartphone ha deciso di vendere un nuovo modello di telefono. Purtroppo però, una certa percentuale (espressa da un numero intero) dei telefoni prodotti è difettosa. Se il telefono venduto non è difettoso, l'azienda guadagnerà 20€ sulla vendita. Se è difettoso, dovranno rimborsare il cliente e perderanno 280€. Se si calcola quanto si guadagna in media dalla vendita di un cellulare, la media in questione è negativa. Sulla base di queste informazioni, quanti sono, in media, i cellulari difettosi preso un insieme di 500 cellulari?

15. SOMMA CIFRE Matteo Salicandro

Per ogni intero positivo n chiamiamo $S(n)$ la somma delle cifre di n. Ad esempio $S(2021) = 2 + 0 + 2 + 1 = 5$.
Dire per quanti interi positivi $n \leq 2021$ accade che le quantità $S(n^3) - S(n^2)$ è multipla di 9.

16. ARROTONDAMENTO Matteo Salicandro

Dato un numero reale positivo x tale che $x - \frac{1}{2}$ non sia un numero intero, definiamo (x) il numero x arrotondato all'intero più vicino. Per esempio $(\pi) = 3$, $\left(\frac{11}{3}\right) = 4$. Qual è il più grande intero positivo $m \leq 2021$ per cui accade che $\left(\sqrt{m}\right) \neq \left(\sqrt{m+1}\right)$?

17. MEDIANE AL QUADRATO Matteo Salicandro

Sia ABC un triangolo in cui $BC = 24$ e sia M il punto medio di BC, N il punto medio di AC, P il punto medio di AB.
Sapendo che $AM = 36$, determinare quanto vale $BN^2 + CP^2$.

18. LAMBDA Matteo Salicandro

Sia $p(x) = x^5 - 3x + 1$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$ le sue radici complesse. Quanto vale $\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \cdots + \lambda_5^4$?

19. SEMPRE PRIMO Paride Lauretti e Matteo Salicandro

Un numero intero n di 3 cifre privo di cifre nulle $\overline{abc}$ si dice *sempre primo* se $a + b, b + c, c + a$ sono numeri primi (ma n non è necessariamente primo). Quanto vale la somma di tutti i numeri sempre primi?

20. PALLINE IN PIU' Sandro Campigotto

Un sacchetto contiene 4 palline bianche e 4 palline nere. Aggiungendo $n > 0$ palline gialle nel sacchetto, la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore non cambia. Quanto vale n?

21. MCD E MCM Matteo Salicandro

Consideriamo tutte le coppie (a, b) di interi positivi con $a \geq b$ tali che $\frac{1}{mcm(a,b)} + \frac{1}{MCD(a,b)} = \frac{3}{5}$. Per ciascuna coppia siffatta si calcoli il valore di $a + b$. Che risultato si ottiene?

22. CHE BELLE LE CORDE! Matteo Salicandro

Sia ABC un triangolo rettangolo in B, in cui $AB = 42, BC = 6$. Sia P il punto sul lato AC tale che $AP = 42$ e sia Q il punto sul lato AC tale che $CQ = 6$. Sia Ω la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, la retta BP interseca Ω nuovamente in X, la retta BQ interseca Ω nuovamente in Y. Quanto vale la lunghezza di XY?

23. LA MEDIA INSUFFICIENTE Matteo Salicandro

A Carlo, amante della matematica, non piace particolarmente la storia. Per questa ragione, non studia mai e ogni volta che è interrogato si prende un impreparato, che fa media e vale 2. Tuttavia Carlo, da buon matematico, ha deciso di recuperare ed è certo che alla prossima interrogazione prenderà un voto intero, superiore a 2 e minore o uguale a 10; è certo inoltre del fatto che dopo tale interrogazione la media dei suoi voti sarà un numero intero. Quante volte, al massimo, Carlo è stato impreparato quest'anno?

24. UNA FIGURA UN PO' STRANA Gabriele Congedo

Un ottagono possiede i lati, in ordine, di lunghezza $1,2,3,4,5,6,7,8$ e ogni coppia di lati consecutivi giace su rette perpendicolari. Qual è l'area dell'ottagono?

Buona estate e buon nuovo anno olimpico!