SOLUZIONI GARA DI FINE ANNO (31/05/2021)

1. LE RADICI UNA DIETRO L'ALTRA [2020]

Ricordando che $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ ricaviamo che la somma richiesta (composta da 2020 addendi) è pari a: $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 2020 \cdot 1 = 2020$.

2. A DUE A DUE [3]

Scomponendo si trova che $n(n-1)(n-2) = m^2$. $m = 2h$ con h intero in quanto $n(n-1)(n-2)$ è pari, essendo almeno uno tra n e $n-1$ pari. Distinguiamo due casi.

Caso 1 - n pari

Supponiamo $n = 2k$ con k intero.

Allora $k(2k-1)(k-1) = h^2$. Tuttavia $k, k-1, 2k-1$ sono a due a due coprimi, quindi sia $k, k-1, 2k-1$ sono quadrati perfetti.

L'unica coppia di quadrati consecutivi è $0{,}1$ quindi $k = 1$, ed effettivamente $k, k-1, 2k-1$ sono tutti quadrati. Se invece $k = 0$, allora essendo 0 un quadrato, si ha che la soluzione trovata va comunque bene.

Quindi se n è pari abbiamo due soluzioni, cioè $(m,n) = (0,2), (0,0)$.

Caso 1 - n dispari

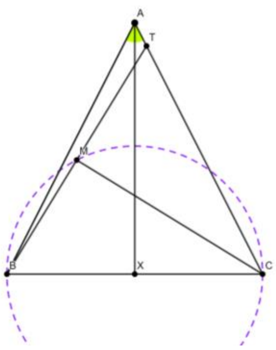
Poniamo $n = 2k+1$ con k intero, allora $(2k+1)k(2k-1) = \frac{m^2}{2}$.

Notiamo che $2k+1$ e $2k-1$ sono due dispari consecutivi ergo sono coprimi. Inoltre, in generale $k, 2k-1, 2k+1$ sono coprimi quindi tutti e 3 i numeri devono essere quadrati.

Se $2k+1$ e $2k-1$ fossero entrambi quadrati dovrebbero esistere due quadrati che hanno differenza 2, ma ovviamente non esistono. Se invece $k = 0$, otteniamo $n = 1$, $m = 0$.

In definitiva le coppie che soddisfano l'equazione sono $(0,2), (0,1), (0,0)$ da cui troviamo la risposta $0 + 2 + 0 + 1 + 0 + 0 = 3$.

3. CIRCOCENTRO SULLA BISETTRICE [54]



Il triangolo BCT è isoscele su base BT quindi detto M il punto medio di BT si ha che $CM \perp BT$ ossia che $\widehat{BMC} = 90°$. Detto quindi X il circocentro di BMC, si ha che X è quindi il punto medio dell'ipotenusa del triangolo BMC cioè il punto medio di BC.

Il triangolo ABC è quindi isoscele in quanto la bisettrice dell'angolo al vertice passa per il suo punto medio, da cui ricaviamo che l'angolo al vertice vale $180° - 2 \cdot 63° = 54°$.

4. ESTIVO [3125]

Se $i = 1$, la prima proprietà ci dice immediatamente che tutte le cifre di n devono essere dispari.

Dimostriamo ora che tutti i numeri con solo cifre dispari funzionano: preso un numero della forma $\overline{abcde}$, con a, b, c, d, e dispari si ha che:

Preso un blocco di lunghezza dispari, la somma delle cifre di quel blocco è data da un numero dispari di addendi dispari (e quindi è dispari), preso un blocco di lunghezza pari, la somma delle cifre di quel blocco è data da un numero pari di addendi dispari (e quindi è pari).

Quindi tutte le cifre di n sono dispari e in definitiva ogni cifra di n può essere scelta in 5 modi $(1{,}3{,}5{,}7{,}9)$. La soluzione è quindi $5^5 = 3125$.

5. EVVIVA IL RISPARMIO [9]

Ci sono 6^3 modi possibili di estrarre le monete.

Se chiamiamo $f(n)$ il numero di modi in cui è possibile pagare un conto di $n \in$ (senza ricevere resto) con le monete a nostra disposizione, siamo alla ricerca del più grande intero m tale che $f(3) + f(4) + \cdots + f(m) < \frac{216}{2} = 108$.

Per ogni modo di pagare un conto di $m \in$ (si considerino tre monete di $a \in, b \in, c \in$) esiste un modo di pagare un conto di $21 - m \in$ con tre monete di taglio $7 - a \in, 7 - b \in, 7 - c \in$. Quindi $f(m) = f(21 - m)$.

Ciò vuol dire che $f(3) + f(4) + \cdots + f(10) = f(11) + f(12) + \cdots + f(18) = 108$.

Ma $f(10) > 0$ quindi sicuramente $f(3) + f(4) + \cdots + f(9) < 108$. La risposta è quindi 9.

6. DISUGUAGLIANZE CICLICHE [186]
La disuguaglianza $DA^2 + AB^2 \leq DB^2$ implica $\widehat{DAB} \geq 90°$, analogamente $DC^2 + BC^2 \leq DB^2$ implica $\widehat{DCB} \geq 90°$. Per la ciclicità di $ABCD$ vale $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°$ ma questo vuol dire che sia $\widehat{DAB}$ che $\widehat{DCB}$ sono angoli retti. Per il Teorema di Pitagora vale quindi $DB = \sqrt{300 + 100} = 20$. Vogliamo ora massimizzare l'area di BCD visto che l'area di DAB è fissata. Al variare di C sull'arco DB vogliamo massimizzare la distanza di C dal segmento DB. Tale massimo si ha nel caso in cui C è il punto medio dell'arco DB, ossia quando DCB è un triangolo rettangolo isoscele. IN questo caso l'area di DCB vale $20 \cdot \frac{20}{4} = 100$. L'area di DAB vale $10\sqrt{3} \cdot \frac{10}{2} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}5$.
L'area cercata è quindi $86{,}5 + 100 = 186{,}5$, la cui parte intera è 186.

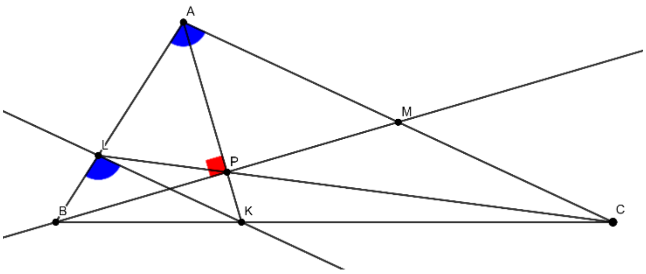
7. SEMPRE INTERO [8400]
Sicuramente n è un multiplo di $2, 3, 5$ quindi $n = 2^a 3^b 5^c$con a, b, c interi positivi.
La prima informazione ci dice che $a + 1, b, c$ sono multipli di 2, la seconda ci dice che $a, b + 1, c$ sono multipli di 3, la terza ci dice che $a, b, c + 1$ sono multipli di 5.

Risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} a \equiv 1 (mod\ 2) \\ a \equiv 0 (mod\ 3) \\ a \equiv 0 (mod\ 5) \end{cases} \begin{cases} b \equiv 0 (mod\ 2) \\ b \equiv 2 (mod\ 3) \\ b \equiv 0 (mod\ 5) \end{cases} \begin{cases} c \equiv 0 (mod\ 2) \\ c \equiv 0 (mod\ 3) \\ c \equiv 4 (mod\ 5) \end{cases}$$

Ricaviamo che i minimi interi positivi a soddisfare tali condizioni sono $a = 15, b = 20, c = 24$.
I divisori quindi sono, come minimo $16 \cdot 21 \cdot 25 = 8400$.

8. IL LATO IGNOTO E INTERO [155]
Dalla definizione di asse ricaviamo che il triangolo ALK è isoscele su base AK quindi $\widehat{AKL} = \widehat{KAL}$ ma $\widehat{AKL} = \widehat{KAC}$ dunque le rette LK e AC sono parallele. Questo vuol dire che $LKCA$ è un trapezio e quindi per omotetia (*) (oppure applicando il teorema di Ceva sfruttando la relazione $\frac{BL}{LA} = \frac{BK}{CK}$ ottenuta per Talete) la retta BP passa per i punti medi delle basi, dunque essa passa anche per il punto medio M di AC. Siccome la bisettrice AP del triangolo ABM è perpendicolare alla retta BM si ha che ABM è isoscele quindi $AC = 2AM = 2AB = 104$. Per la disuguaglianza triangolare $AB + AC > BC$ quindi $BC < 156$, da cui ricaviamo che il massimo valore possibile per BC è 155.



(*) Si può dimostrare, utilizzando le omotetie, che i punti medi delle basi di un trapezio, l'intersezione delle diagonali e l'intersezione dei lati obliqui sono tutti sulla stessa retta.

9. COPPIE DI INTERI POSITIVI [36]
Affinché $a^2 b$ divida 7^{10} è necessario che $a^2 b = 7^z$ con z intero non negativo. Scriviamo $a = 7^{2m}, b = 7^n$, siccome 7 è un numero primo.
In generale l'equazione $2m + n = k$ ha $P(k)$ soluzioni intere non negative dove k è il numero di interi non negativi pari compresi tra 0 e k. La soluzione è quindi $P(0) + P(1) + \cdots + P(10) = 1 + 1 + \cdots + 6 = 36$.

10. UN MAZZO COSI' [80]
Notiamo che la prima carta del mazzo rimane sempre la stessa, cioè la carta con il numero 2021, mentre la seconda carta all'inizio è 2020, e poi segue il ciclo 1, 2, 3..., aumentando di 1 per ogni mossa e ritornando a 1 con la mossa numero 2021. Ci restano quindi 79 mosse in più, il che significa che alla mossa numero 2100 ci sarà il numero 80 scritto sulla seconda carta.

11. CHE COLPO! [6816]
Notiamo che una piramide che ha per base un poligono regolare di n lati ha esattamente $n + 1$ vertici e $2n$ spigoli, e che un prisma che ha per base un poligono regolare di n lati ha esattamente $2n$ vertici e $3n$ spigoli. Con questi dati possiamo creare un sistema di equazioni, dove x è il numero di lati del poligono di base della piramide e y è il numero di lati del poligono di base del prisma. $\begin{cases} x + 2y + 1 = 167 \\ 2x + 3y = 284 \end{cases}$
Risolvendo il sistema, otteniamo che $x = 70$ e $y = 48$, il che significa che $p = 71, q = 96$.

12. L'ISOLA TROPICALE [2497]
Procediamo ragionando sulle possibilità di ogni riga. Mettere 49 alberi su 50 caselle è equivalente a mettere uno spazio vuoto su 50 caselle. Nella prima riga possiamo mettere lo spazio vuoto in ciascuna delle 50 caselle, per la seconda riga possiamo metterla nelle 49 caselle che non sono parte della colonna in cui è presente lo spazio vuoto della prima riga, e così via. Il che significa che il numero di possibilità è 50!, il cui esponente del primo 2 nella sua fattorizzazione vale $\left\lfloor\frac{50}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{4}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{50}{32}\right\rfloor=47$. Per ciascun quadrato occupato, possiamo piazzare un albero a scelta tra due alberi. Siccome in ogni configurazione sono piantati $49\cdot 50=2450$ alberi, il numero dei modi è in totale $50!\cdot 2^{2450}=2^{47}\cdot D\cdot 2^{2450}$ con D dispari. La risposta è quindi $2450+47=2497$.

13. SOMMATORIA PARECCHIO LUNGA [80]
Sia $g(n)=5f(n)=(7-2)f(n)=7^{n+1}-2^{n+1}$. Il problema si riduce a trovare per quali n accade che $g(n)$ è multiplo di 125. Sia $v_5(n)$ l'esponente di 5 nella fattorizzazione di n, vogliamo che $v_5\big(g(n)\big)\geq 3$.
Per il lemma LTE, si ha che $v_5\big(g(n)\big)=v_5(5)+v_5(n+1)=1+v_5(n+1)$.
Pertanto $v_5(n+1)\geq 2$, cioè $n+1$ deve essere multiplo di 25, in altre parole $n=25k+24$ con $k\geq 0$ intero. In particolare $n\leq 2021$ implica $k<80$. Quindi ci sono 80 valori possibili per k, da cui la risposta.

14. SULL'ORLO DEL FALLIMENTO [35]
Sia x la percentuale di telefoni difettosi rispetto al totale. Il guadagno medio per telefono è dato quindi da $20(100-x)+(-280)x$. L'azienda perde soldi, quindi $2000-300x<0$. Risolvendo la disequazione, abbiamo che $x<100/15$, che in percentuale è circa il 6.67%. Dato che la percentuale di telefoni difettosi è intera, deve essere pari al 7%. In definitiva preso un insieme di 500 cellulari, il valore medio dei cellulari difettosi risulta essere pari a $500\cdot\frac{7}{100}=35$.

15. SOMMA CIFRE [898]
Per il criterio di divisibilità per 9 si ha che la differenza tra un numero e la somma delle sue cifre è sempre divisibile per 9. Quindi $n^3-n^2=n^2(n-1)$ deve essere un multiplo di 9. Se n è multiplo di 3, questo accade sicuramente. Se n non è multiplo di 3, è necessario che $n-1$ sia un multiplo di 9. Quindi $n=9k+1$ con $k\geq 0$ intero. Ci sono in questo caso 225 valori possibili per k in quanto $n\leq 2021$. I multipli di 3 compresi tra 1 e 2021 sono invece $\left\lfloor\frac{2021}{3}\right\rfloor=673$. I numeri in questione sono $673+225=898$.

16. ARROTONDAMENTO [1980]
Sappiamo che $\sqrt{2021}<45$, quindi $44<\sqrt{m}<45$. Stiamo cercando un valore che è più vicino possibile a 44.5, cioè la media di 44 e 45. Quindi conviene fare la media tra 44^2 e 45^2, che è uguale a $\frac{3961}{2}$, che è compreso tra 1980 e 1981. Quindi il numero m cercato è 1980.

17. MEDIANE AL QUADRATO [1296]
Sia G il baricentro di ABC. Esso stacca la mediana in due parti, una il doppio dell'altra, in altre parole $AG=2GM$ da cui troviamo che $GM=\frac{AM}{3}=12$. Notiamo quindi che $MB=MC=MG$, cioè il triangolo BGC è rettangolo in quanto iscritto in una circonferenza di diametro BC. Cioè per il Teorema di Pitagora, vale $BG^2+GC^2=BC^2=576$ e ricordando che il baricentro stacca la mediana in due parti una il doppia dell'altra possiamo dire che $BN^2+CP^2=\frac{9}{4}(BG^2+GC^2)=\frac{9}{4}(576)=1296$.

18. LAMBDA [12]
Chiaramente $p(x)$ non ha radici nulle, quindi se λ è radice del polinomio allora $\lambda^4=3-\frac{1}{\lambda}$.
La quantità richiesta è pari a $\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4+\lambda_5^4=3\cdot 5-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}-\cdots-\frac{1}{\lambda_5}$.

La quantità $\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{\lambda_5}=\frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5+\lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5+\lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_5+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5}=\frac{-3}{-1}=3$ per le relazioni radici-coefficienti note anche come Formule di Viète. Dunque il risultato è $3\cdot 5-3=12$.

19. SEMPRE PRIMO [2109]
Se $a+b, b+c, c+a$ sono numeri primi allora $2a+2b+2c$ (che è pari) è somma di tre numeri primi. Ciò vuol dire che esattamente uno tra $a+b, b+c, c+a$ è pari a 2, oppure lo sono tutti.
Nel caso in cui $a+b=b+c=c+a=2$ abbiamo che solo il numero 111 soddisfa la nostra richiesta.
Se $a+b=2$, troviamo $a=1, b=1$. Siccome $b+c, c+a$ sono primi, abbiamo che $c+1$ deve essere primo, cosa che è possibile se e solo se $c=2,4,6$.
In definitiva se $a+b=2$, abbiamo i numeri sempre primi $112,114,116$, le cui permutazioni vanno considerate!
La risposta è $111+112+121+211+114+141+411+116+161+611=2109$.

20. PALLINE IN PIU' [13]

Calcoliamo la probabilità $p_{iniziale}$. Prima dell'aggiunta delle palline gialle, la probabilità era $\frac{2\cdot\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{7}$.

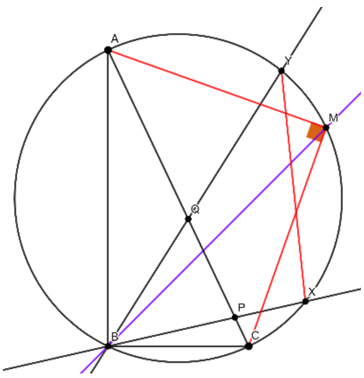
Dopo l'aggiunta delle palline gialle, la probabilità p_{finale} è $\frac{12+\binom{n}{2}}{\binom{n+8}{2}} = p_{iniziale} = \frac{3}{7}$.

Dunque $\frac{3(n+8)(n+7)}{2} = \frac{7}{2}(24 + n(n-1))$. Svolgendo i conti troviamo che $3(n^2 + 15n + 56) = 7(24 + n^2 - n)$ cioè vale $3n^2 + 45n + 168 = 168 + 7n^2 - 7n$. Semplificando ulteriormente troviamo che $4n^2 - 52n = 0$ cioè $n^2 - 13n = 0$, che ha come soluzione accettabile $n = 13$.

21. MCD E MCM [12]

Per semplicità sia $p = MCD(a,b)$ e $q = mcm(a,b)$. Troviamo le soluzioni intere di $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{5}$. Troviamo che vale la relazione $3pq = 5p + 5q$. Possiamo scrivere $p(3q-5) = 5q$, cioè $\frac{5q}{3q-5}$ è intero. Se $\frac{5q}{3q-5}$ è intero, lo è anche $\frac{15q}{3q-5}$.
Sicuramente $\frac{15q-25}{3q-5} = 5$ è intero, quindi $\frac{25}{3q-5}$ deve essere intero.
Se $3q - 5 = 25$, allora $q = 10$.
Se $3q - 5 = 5$, allora q non è intero.
Se $3q - 5 = 1$, allora $q = 2$.
Se $3q - 5 = -1$, allora q non è intero.
Se $3q - 5 = -5$, allora $q = 0$ e ovviamente non possiamo accettarlo.
Se $3q - 5 = -25$, allora $q < 0$ quindi non va bene.
Se $mcm(a,b) = 10$ allora $MCD(a,b) = 2$, se $mcm(a,b) = 2$ allora $MCD(a,b) = 10$, inaccettabile in quanto $MCD(a,b) \le mcm(a,b)$.
L'unica possibilità è che $MCD(a,b) = 2$ e $mcm(a,b) = 10$. Ciò vuol dire $ab = 20$. Tra le coppie $(1,20); (2,10); (4,5)$ soddisfa solamente $(2,10)$ ma essendo $a \ge b$ si ha che $(10,2)$ è l'unica soluzione. La risposta è $10 + 2 = 12$.

22. CHE BELLE LE CORDE [30]



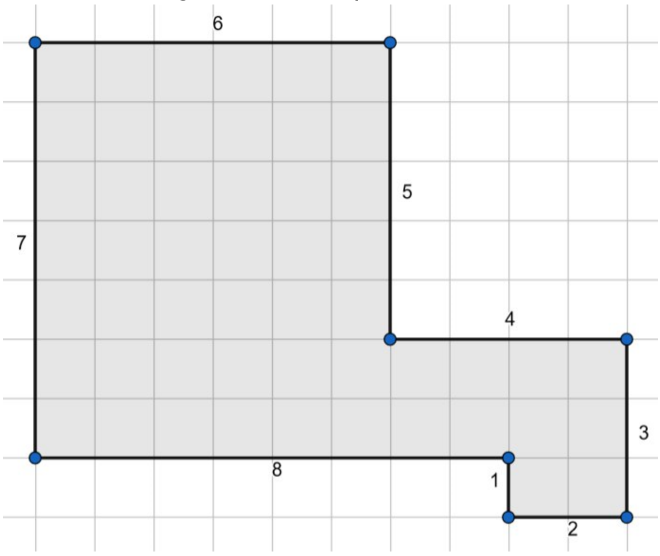
Tracciamo la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$ che interseca Ω nel punto M. Ricordando che ad angoli congruenti corrispondono corde congruenti ricaviamo che $AM = MC$, in particolare AMC è un rettangolo isoscele.
Notiamo che BAP, BCQ sono isosceli per ipotesi. In particolare $\widehat{BPQ} = \widehat{BPA} = 90° - \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Similmente $\widehat{BQP} = \widehat{BQC} = 90° - \frac{\widehat{BCA}}{2}$. Quindi $\widehat{QBP} = 180 - \left(180 - \frac{\widehat{BAC}+\widehat{BCA}}{2}\right) = 45°$.
La corda XY è quindi vista da un angolo pari a $45°$. Per cui $XY = AM = MC$.
Per il Teorema di Pitagora $AC^2 = 1800$ e in particolare $AM^2 + MC^2 = 2AM^2 = 1800$, da cui troviamo che $AM^2 = 900$ cioè $AM = 30$. Avendo dimostrato che $XY = AM$, si ha che $XY = 30$.

23. LA MEDIA INSUFFICIENTE [7]

Denotiamo con n il numero di volte in cui Carlo è risultato impreparato, e sia v il voto successivo. Dunque la sua media è data da: $\frac{2n+v}{n+1}$ che sappiamo essere un numero intero.
Inoltre v è un parametro intero positivo maggiore di 2 e minore o uguale a 10. Possiamo scrivere che $\frac{2n+2+v-2}{n+1}$ deve essere intero e quindi $\frac{v-2}{n+1}$ è intero. Siccome chiaramente $n + 1 \le v - 2$ si ha che v deve essere più grande possibile.
Se $v = 10$, allora $n + 1 \mid 8$ ergo il massimo valore possibile per n è 7. Se $v < 10$, allora $n \le 6$. In definitiva il massimo numero di volte in cui Carlo è stato impreparato è pari a 7, e esiste un caso che conferma questa cosa.
Supponiamo infatti il suo storico dei voti in storia come segue: 2,2,2,2,2,2,2,10.
La sua media dei voti è in questo caso pari a 3 ed è risultato impreparato 7 volte.

24. UNA FIGURA UN PO' STRANA [52]

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano Oxy e consideriamo il punto $P_8(0,0)$. Denotiamo con $P_1, P_2, \dots, P_8$ i vertici dell'ottagono e siano (x_i, y_i) le coordinate di P_i. Ogni volta che disegniamo un vertice del poligono P_i si ha che $P_i = (x_{i-1} \pm i, y_{i-1})$ oppure $P_i(x_{i-1}, y_{i-1} \pm i)$, avendo cura che i lati di lunghezza dispari siano tutti paralleli, così come tutti i lati di lunghezza pari devono essere paralleli. Siccome il poligono deve chiudersi, vogliamo quindi scrivere 0 come somma di addendi $1 \pm 3 \pm 5 \pm 7$ e come somma di addendi $2 \pm 4 \pm 6 \pm 8$. Questo ci dice che, nel caso dei lati di lunghezza dispari, immaginando di percorrere il perimetro del poligono partendo dal punto P_8, i segmenti 1 e 7 sono percorsi nello stesso verso, così come i segmenti 3 e 5. Allo stesso modo, percorreremo i segmenti lunghi 2 e 8 nello stesso verso, così come i segmenti lunghi 4 e 6. Queste informazioni ci permettono di costruire l'ottagono su carta quadrettata in maniera univoca nel modo seguente:



Contando i quadretti (oppure scomponendo la figura in rettangoli più piccoli di cui calcolare l'area è facile), si arriva alla risposta 52.

Soluzioni a cura di: Congedo Gabriele, Monteduro Lorenzo, Salicandro Matteo.