Gara di fine anno

Matteo Salicandro – 30 Maggio 2022

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se un problema ha due o più soluzioni, o la risposta vale infinito, si indichi 9999.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre (se non diversamente indicato).**
- I problemi a mio avviso meno facili sono indicati con una stella ($\star$) o con due stelle se ancora meno facili ($\star\star$)

Scadenze Importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Ed oltre a tante cose che è bello tenersi private...






1. Sveglia presto

I sardi partono per Cesenatico con un viaggio particolarmente tortuoso, aereo fino a Venezia, passando per Bologna (senza trascurare la stazione di Godo, vicino Ravenna). Christian decide di arrivare in aeroporto con largo anticipo, solo per poter dire di essere stato in aeroporto alle ore 4:20 (ma perché, esattamente?) Gli altri sardi sono arrivati dopo Q minuti, dove Q è il numero di quadruple (a, b, c, d) di interi positivi minori di 10 tali che $f(a, b, c, d) = 1$ e $f(a, b, c, d)$ è definita come segue:

$$f(a, b, c, d) = (-1)^a \cdot 3 + (-1)^b \cdot 6 + (-1)^c \cdot 5 + (-1)^d \cdot 7$$

Dopo quanti minuti sono arrivati gli altri sardi?

2. Panino a casa

Anche Mattysal parte in aereo fino a Bologna, col fine di raggiungere Cesenatico presto, per potersi riposare. Tuttavia, dopo pochi minuti di auto realizza di aver dimenticato la carta di imbarco e il panino a casa. Non è un problema la carta di imbarco... fortunatamente siamo nel 2022 ed esistono i telefoni cellulari che, ahimè, ancora non preparano i panini! E fu così che, una volta atterrato, decise di dirigersi al KFC della stazione di Bologna Centrale per un pasto che può comporre come vuole... Può e vuole comprare esattamente 300 g di cibo, che può decidere di dividere tra un numero non negativo di patatine fritte e di ali di pollo piccanti (Gnam!). Sapendo che una patatina fritta pesa 2 g e un'ala di pollo pesa 31 g, in quanti modi Mattysal può comporre il suo pasto?

3. Pacciani va bene?

Anche Dommaso Tossi decide di comprare un panino da KFC, anzi due... In pratica, il primo panino ω_1 era una circonferenza di centro O e raggio 32. Preso un punto A tale che $AO = 56$, il secondo panino da lui preso era proprio la circonferenza ω_2 di diametro AO. Insoddisfatto di come si presentava il suo cibo, ha unito i due panini, che si intersecavano in due punti P, Q. Detto P' il simmetrico di P rispetto a O, ha tracciato poi la parallela alla retta AO passante per P' che interseca la circonferenza ω_1 nuovamente nel punto R. -Devo postare qualcosa su @mate.volta, Pacciani va bene?- chiede Tommaso. -Francamente credo che sarebbe più opportuno se postassi il valore di QR^2.- risponde Edoardo Balistri, incontrato con molte difficoltà sul regionale 17549. -Ok, l'ho postato- afferma Dox. Che numero era?

4. Un bel gruppo!

Entrambi amanti delle passeggiate a piedi, dopo un riposo durato qualche frazione di secondo, Mattysal, già a Cesenatico, raggiunge Noemi in stazione. Giusto il tempo di sistemarsi in albergo, ci raggiunge e si forma in bel gruppetto tra Galilei di Catania, Pacinotti di Cagliari... vabbè, tutto si può riassumere in 'Gruppo Hotel Metron'. Sbuca anche Michele Tomasi, intento a risolvere un problema di Teoria dei Numeri che consisteva nel trovare tutte le coppie (a, b) di numeri interi tali che

$$a^2b^2 + 7b + 5a - 5a^2b = ab + b^2 + 11$$

-Michele basta fare mate perché sennò ti stressi per domani...- afferma Federico Argiolas, che in realtà ha già trovato tutte le coppie che soddisfano tale uguaglianza e, per ciascuna di esse, ha calcolato la quantità $|ab|$. Qual è la somma di tutte quelle quantità calcolate?

5. Il gioco di liberi e prigionieri

In questo problema, dato un intero positivo n, e un altro intero positivo k, diremo che n è *libero da potenze k-esime* se per ogni $m > 1$, con m intero positivo, si ha che $m^k \nmid n$, altrimenti lo definiremo *prigioniero da potenze k-esime.* Il gruppo Metron è radunato in cerchio, e, oggi, si gioca a "Libero", ponendo $k = 11$. A turno, a partire da 2, ogni giocatore deve pronunciare 'libero' se il numero in questione è libero da potenze k-esime, altrimenti, pronunciare il numero in questione. Non appena viene pronunciato un numero prigioniero, il giocatore che finora ha parlato smette di parlare e passa la parola al giocatore alla sua destra, che riprende il gioco dall'ultimo numero pronunciato dal giocatore accanto a lui, aumentato di 1. *Ad esempio, supposto $k = 2$, il primo giocatore dirà -Libero, libero, 4-, il secondo dirà -Libero, libero, libero, 8-, il terzo dirà -9-, il quarto dirà -Libero, libero, 12... e così via.* I nostri instancabili matematici arrivano fino al più grande prigioniero minore di 200000, ultimo numero a essere pronunciato. Niso vi chiede: -Abbiamo giocato tutti perfettamente, grazie ai suggerimenti della prof. Sitzia, ma ora basta, siamo tutti stanchi. Qual è stato, in questo frangente, il numero più basso di 'libero' consecutivi che qualcuno di noi ha pronunciato?-

6. AlcOldeman [$\star$]

È ora di fare provviste per la gara di domani! Un gruppo numeroso di studenti si dirige presso un supermercato di Cesenatico... Intanto, agli individualisti sale un po' di ansietta per il giorno dopo. Christian, che regge benissimo l'alcol, ha definito la funzione $Shot : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ per decidere quanto ubriacarsi la sera prima dell'individuale in cui purtroppo non è coinvolto. E Christian, con grande serietà, dichiara: -La funzione $Shot(k)$ rappresenta il numero di *Shots* che stanotte berrò alle ore k. Non è un caso che l'insieme di arrivo sia $\mathbb{Z}^+$ perché bevo sempre una quantità positiva di shots a ogni ora.- -Sicuro che ti faccia bene?- chiede Monti. -Mah, sì. Però non bevo a caso, la funzione è tale che:

- $Shot(n)$ è debolmente crescente;
- Esiste un intero $1 \leq i \leq 10$ tale che $Shot(i) = 3$;
- Per ogni intero m si ha $Shot(m + 1) \leq Shot(m) + 1$

-Sarebbe meglio se $Shot(x) = 0$ per ogni x reale, secondo me... e in ogni caso $Shot(n)$ non è univocamente determinata.- afferma Michele Tomasi. -Hai ragione! Ma quante sono le funzioni Shot possibili sulla base di questa affermazione?- chiede Christian. *Nel mentre, Mattysal sparisce, alla ricerca di un ombrello, che a causa del vento si rompe dopo 5 minuti.*

7. Il regalo di Noemi [$\star$]

Un fantastico e inaspettato regalo di compleanno è stato consegnato a Mattysal da parte di Noemi. Da bravo viaggiatore, Mattysal ha apprezzato il quadernetto di Noemi che conteneva un certo numero N di pagine *per annotare problemi, pensieri, per prendere appunti sui suoi viaggi.* Ma in realtà non è stato esattamente così. Mattysal ha preso infatti una matita e ha scritto su ogni pagina del quadernetto di Noemi tutti i possibili numeri di m cifre positive, tutte minori o uguali a 3. Realizza poi che scrivendone 100 su ogni pagina, purtroppo uno di questi numeri sarebbe dovuto essere scritto su un'altra pagina. Insoddisfatto dell'asimmetria, ha cancellato tutto e ha scritto sul quadernetto di Noemi tutti i possibili numeri di m cifre positive, tutte minori o uguali a 7. Realizza poi che, pur avendone scritti 100 per pagina, ha riempito tutte le pagine tranne l'ultima pagina in cui ce n'è scritto solo uno. Sapendo che $1 \leq m \leq 2022$, quanti possibili valori potrebbe assumere N? -Non era esattamente così che volevo utilizzassi il mio regalo...- pensa Noemi.

8. Il furto della mascotte

Mattea e Riky organizzano il furto della mascotte del Liceo Quadri: si tratta di un gigantesco orsetto di peluche che indossa una maglietta del Liceo Quadri. Dopo un po' di esitazione, Riky, travestito da ornitorinco, nasconde l'orsacchiotto nella sua stanza da letto, sotto una coperta che ha come forma un triangolo ABC con $AB = 70, BC = 80, CA = 90$. Su tale coperta ha disegnato una circonferenza ω poi colorata di rosso, come per dire: *Non toccare!*, inoltre ω passa per A e tange il lato BC in R. Casualmente, Riky scopre che la circonferenza ω intersecava anche il lato AB in P e il lato AC in Q... e come se non bastasse, Mattea nota che il cerchio per B, P, R è tangente alla retta AR, così come il cerchio per C, Q, R. I piedini dell'orsetto erano al sicuro, all'interno del quadrilatero $BPQC$. Qual era la sua area? Esprimere il risultato nella forma $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ con a, b interi positivi coprimi e c libero da quadrati. Calcolare $a + b + c$.

9. Prossimi cinque!

All'entrata della gara individuale, probabilmente per evitare assembramenti, Matiacic invitava i concorrenti dicendo, per ben $\lceil N/5 \rceil$ volte: -Prossimi cinque!- con N numero di presenti in colonia, tra concorrenti e organizzatori. Nella Colonia Agip i concorrenti erano disposti in 60 file da 5 persone ciascuna, dopo quattro ore e mezza passate in maniera particolarmente veloce, Samuele Mongodi tuona dicendo: -Alzate il braccio con il vostro compito in mano, ora!- Qualcuno ha alzato il braccio destro, qualcuno il braccio sinistro. Tuttavia, se una persona in una certa fila ha alzato il braccio destro e la persona alla sua destra (sempre nella medesima fila) ha alzato il braccio sinistro, allora le braccia si scontrano, suscitando l'ira degli organizzatori. In quanti modi si può scegliere, per ogni concorrente, il braccio da fare alzare in modo tale che gli organizzatori non si arrabbino? Dare come risposta il numero di divisori interi positivi del risultato.

10. Ombrello rotto

L'ombrello di qualcuno che ha deciso di fare una bella camminata a piedi dalla spiaggia al palazzetto (per fare da spettatore alle semifinali) si è purtroppo rotto, e, per sua sfortuna, si è un po' bagnato. Al minuto n della passeggiata sono cadute $g(n)$ gocce su questo povero sventurato senza ombrello, dove $g(n)$ è il numero di radici reali distinte del polinomio $p_n(x) = x^n + 2x + 1$. Quante gocce sono cadute su questa povera persona senza ombrello, se la passeggiata è durata complessivamente un'ora e venti minuti?

11. Navetta in tilt

Stanchi dalla semifinale, i concorrenti delle gare a squadre salgono finalmente sulla navetta per essere riportati in albergo. L'autista della navetta nota che sono stati percorsi N km, con $100 < N < 500$ intero positivo pari, ma realmente ne sono stati percorsi $N/2$. -Ho capito perché ne segna di più! Le cifre $7, 8, 9$ sono rotte e non vengono mostrate, il contachilometri mostra direttamente il numero successivo che non contiene quelle cifre. Infatti, dopo 6 chilometri percorsi, al settimo chilometro percorso ne segnerà in realtà 10! Voi passeggeri, che siete matematici... qualcuno sa dirmi qual è il massimo numero di chilometri reali, sulla base di questi dati, che sono stati percorsi?-

12. Tiziana: beccata

Finalmente Tiziana, capitata per caso nell'Hotel Rugantino, becca Valentino Badalucco (vi ricordate della Fugassa Cup?) e Tiziana Eugenelo, alias *ragazza nota per abuso di lettere y*, tant'è che alcune persone la chiamano, ahimé **TYGYANA**. -Mi spieghi come fai a pronunciare due Y consecutive?- chiede perplesso Badda. -In realtà non si possono pronunciare... il mio nome è infatti *(fa lo spelling)* **T-Y-G-Y-A-N-A**.- -Vabbè, ho capito, non c'è bisogno di fare lo spelling... in realtà non mi serviva. Semplicemente mi chiedevo quanti fossero gli anagrammi pronunciabili del tuo nome, visto che dici che due Y consecutive non sono pronunciabili- si giustifica Badda. Quanti sono?

13. Il canale senza protezioni

Mattysal, durante un giro assieme a Noemi, nota che Cesenatico possiede un canale senza protezioni, abbastanza rischioso, se esci ubriaco da qualche locale lì vicino. -Diciamo che non è molto improbabile cadere in mare.- afferma Noemi notando che non c'è nessuna persona in quella zona di Cesenatico. Nel silenzio, si pensava che tutti fossero impegnati a risolvere un certo problema che chiedeva il prodotto di tre numeri complessi non nulli a, b, c tali che $a^3 + b^3 + c^3 = 420$, $a + b + c = 10$ e $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 5$. -Ma è facile, perché non c'è nessuno in giro?- si chiede Mattysal osservando un arcobaleno asimmetrico. Non tarda la risposta da Noemi che si gira dall'altra parte: -Mah, io preferisco G.- commenta infatti Noemi. Quanto vale la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime la parte reale del risultato?

14. Inizia la finale a squadre!

Gli Avengers scendono in campo, qualcuno è travestito da Hulk, qualcuno da Spiderman, qualcuno da Iron Man, qualcun altro da Capitan America. Tanta gente voleva guardare la finale: il Palazzetto era pieno zeppo di persone. Da un lato, infatti, c'erano delle persone, da un altro lato ce n'erano altre. La classifica si riusciva a vedere a malapena, era stata oscurata quasi completamente dalle teste del pubblico. L'area nascosta dalle teste era la stessa area di un quadrilatero $ABCD$ tale che $AB = 10, CD = 20, DA = 100, \widehat{A} = 60^\circ, \widehat{D} = 30^\circ$. Quanto valeva tale area? Dopo aver espresso il risultato nella forma $a\sqrt{b} + c$ con a, b, c interi positivi e b libero da quadrati, dare come risposta $a + b + c$.

15. Ferraris di Torino, Dini di Pisa, Ferraris di Torino, Dini di Pisa! [$\star\star$]

La Finale a Squadre è stata un'occasione per far capeggiare la classifica da un bel po' di squadre nei primi minuti, mentre è stata monopolizzata dal Dini di Pisa per circa tutta la metà della gara. Ma verso la fine, il Ferraris e il Dini si scambiano di posto a velocità sorprendenti, si narra che al tifo delle due squadre abbiano preso parte esattamente 2021 persone $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2021}$. Ogni persona p_i aveva un valore di tifo t_i, con $t_1, t_2, \dots, t_{2021}$ numeri reali; e, se per un certo i, t_i fosse stato maggiore di 0 allora p_i tifava per il Dini, altrimenti per il Ferraris, e se $t_i = 0$ allora p_i è imparziale. Improvvisamente, la voce della telecronaca dice: -Di questi numeri reali sappiamo che, detto $P_j = 3^j \cdot \prod_{i=1}^{2022} 3^{-i}$ valgono le uguaglianze (*fa un bel respiro*):

$$\begin{cases} t_1 + \frac{t_2}{3} + \frac{t_3}{3^2} + \frac{t_4}{3^3} + \dots + \frac{t_{2021}}{3^{2020}} + P_1 = -\frac{1}{3^{2021}} \\ t_1 + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^4} + \frac{t_4}{3^6} + \dots + \frac{t_{2021}}{3^{4040}} + P_2 = -\frac{1}{3^{4042}} \\ \dots \\ t_1 + \frac{t_2}{3^{2021}} + \frac{t_3}{3^{4042}} + \frac{t_4}{3^{6063}} + \dots + \frac{t_{2021}}{3^{2021\cdot 2020}} + P_{2021} = -\frac{1}{3^{2021\cdot 2021}} \\ t_1 + \frac{t_2}{3^{2022}} + \frac{t_3}{3^{4044}} + \frac{t_4}{3^{6066}} + \dots + \frac{t_{2021}}{3^{2022\cdot 2020}} + P_{2022} = -\frac{1}{3^{2022\cdot 2021}} \end{cases}$$

quanto vale quindi la somma dei t_i tali che p_i tifi Ferraris? No, scusate, mi sono sbagliato. Comunque vada la gara, importa il tifo e l'impegno di tutti, quindi mi limiterò a chiedervi quant... DINI DI PISA! SI PORTA IN PRIMA POSIZIONE! Dicevamo, quanto vale la somm... FERRARIS DI TORINO SI RIPORTA IN TESTA! Ok, dicevo, quanto vale la somma di tutti i t_i? DINI DI PISA RISOLVE IL PROPRIO PROBLEMA JOLLY! Vabbè, dopo aver espresso la somma dei t_i nella forma p/q con p, q interi primi tra loro, calcolare... FERRARIS DI TORINO TORNA IN PRIMA POSIZIONE! Dicevo, calcolare le ultime tre cifre di $|q|$.-

16. Un folto gruppo di laziali [$\star$]

Nel Parco di Cesenatico, particolarmente pieno di papere, intravediamo Daniele Saracino che passeggia spensierato all'interno di quel parco, che tiene particolarmente alla salute dei visitatori proponendo dei percorsi con dei certi tempi di camminata. Daniele Saracino sarebbe anche spensierato, assieme ad un gruppo di laziali (tra cui Luca Milanese), anch'essi nel parco, se non fosse che è tormentato dalla forma del lago, pieno di paperelle. Il lago era un triangolo ABC, con $AB = 1500, BC = 2022$. Tre papere percorrevano il lago, lungo la circonferenza passante per i vertici A, B, C, finché non si stancano. Decidono quindi di posizionarsi nei punti P_A, P_B, P_C che corrispondono ai punti medi degli archi BC, CA, AB che non contengono A, B, C rispettivamente. Tre oche Q_A, Q_B, Q_C giacciono rispettivamente sui lati BC, CA, AB in modo tale che $P_AQ_A \perp BC, P_BQ_B \perp CA, P_CQ_C \perp AB$. L'oca Q_A si dirige in linea retta verso il vertice A del lago, e assieme ad essa l'oca Q_B si dirige in linea retta verso il vertice B, con una velocità tale da scontrarsi in un certo punto X. Allo stesso modo, la papera P_C percorre una traiettoria circolare con centro P_C e raggio P_CB, mentre la papera P_B percorre una traiettoria circolare con centro P_B e raggio P_BC, inaspettatamente, oltre a scontrarsi in A, le papere si scontrano ancora una volta in un certo punto Y. La papera P_A, offesa perché non era stata coinvolta negli scontri, decise di andarsene e di percorrere in maniera rettilinea la retta XY, ma non si vide più, perché tale retta non avrebbe mai più incontrato la retta BC. Luca Milanese: -Quanto misura il terzo lato?-

17. La benedizione di Saracino

Con voce calda, ricca di emozione, calato nel momento, Tommaso Dossi apre il rito: -Prodotta nel birrificio di Assemini, Cagliari. La birra Ichnusa, una sostanza un tempo illegale da bere, oggi legale per noi da consumare. Come ti senti per questo evento?- A quel punto, Saracino, dimostrando una forte emozione dichiarò: -Onorato.- *L'emozione salì sempre di più, sorso dopo sorso. Saracino tremava.* -Di quanti sorsi hai potuto godere?- chiede Matteo Gori. Saracino spiega che sta sognando 2022 casse di birra $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{2022}$, e la cassa i contiene $i \cdot m$ birre con $m \leq 2022$ intero positivo e di svuotarle come segue: ogni giorno, se una cassa contiene almeno 2022 birre preleva esattamente 2022 birre da tale cassa, e ripete tale operazione ogni giorno finché tutte le casse contengono meno di 2022 birre. Alla fine dell'operazione, ogni cassa contiene, curiosamente, un numero diverso di birre. Il numero di m possibili affinché questo accada è il numero di sorsi di Ichnusa da lui bevuti. Quanti sorsi ha bevuto Saracino?

18. Sobri, brilli e ubriachi

Durante l'ultima sera, un gruppo di circa 40 persone composto da calabresi, siciliani, sardi e pugliesi decide di lasciarsi andare con qualche birra di troppo. Infatti, tra queste 40 persone ce ne sono di tre tipi: i sobri (che dicono sempre la verità), gli ubriachi (che mentono sempre), i brilli (che dicono sempre di essere sobri negando di essere brilli e di essere ubriachi). A quel punto, Lorenzo Weiss, che ci cerca disperatamente, pone ad ognuno del gruppo le tre domande seguenti: -Sei sobrio?- -Sei brillo?- -Sei ubriaco?-. A conti fatti, ha ricevuto 73 risposte "no" e 47 risposte "sì". Quanti sono al massimo i brilli?

19. Farfalla e Mattone

Samuele da Catania è ben lieto di raccontarvi una barzelletta: *Mamma, figlia e figlio grande. La bambina dice alla mamma: -Mamma, perché mi chiamo Farfalla?- La mamma a quel punto le risponde: -Perché quando sei nata una farfallina si è posata sulla tua testa e quindi ora ti chiami Farfalla.-* Fu così interrotto da una voce fuori dal coro: *Non la conosco ma penso di aver capito.* Samuele si fece intimorire da tale voce fuori dal coro e dichiarò: -Continuerò la narrazione solo se mi dite quanto vale la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini che esprime la somma

$$\frac{2}{1+2}+\frac{2+3}{1+2+3}+\frac{2+3+4}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{2+3+4+\cdots+50}{1+2+3+\cdots+50}$$

Con molta fierezza, Dante trova il risultato corretto, allora Samuele finì di raccontare: *E allora, dice la mamma al fratello: -Diglielo pure tu, Mattone! (Gemiti vari)*
La risata del gruppo si sentì per chilometri e chilometri... ma Dante, estremamente serio, era contento di aver trovato il risultato giusto, qual era?

20. I biscotti di Valeria

Sotto il grattacielo di Cesenatico, c'è Rubens assieme alla cugina Valeria che offre gentilmente dei dolci a tutti: sono 12 biscotti, 1 diverso dagli altri perché è *delizioso*, mentre gli altri 11 sono *buoni*, tutti della stessa dimensione. Rubens invita Christian ad avvicinarsi: -Devi pescare necessariamente il biscotto delizioso, ad occhi chiusi.- -Ma è estremamente improbabile!- commenta Christian. -Ok, effettivamente, per una volta, non hai torto... ma semplifichiamo il gioco. Tu chiudi gli occhi, e peschi un biscotto. Se il biscotto è delizioso, hai vinto. Se invece il biscotto è buono, lo tieni per te e lo rimuovi dalla scatola di Valeria, e ripeti le estrazioni finché non peschi il biscotto delizioso. Se entro dieci mosse non riesci a pescare il biscotto delizioso, allora ti picchio.- afferma Rubens. Determinare la probabilità che Rubens picchi Christian. Dopo avere espresso tale probabilità nella forma p/q con p, q interi positivi coprimi, determinare $p + q$.

I fatti raccontati nella gara sono ispirati a fatti realmente accaduti, ma non necessariamente. Ogni problema è stato scritto senza la minima intenzione di schernire o deridere qualcuno.