# Gara di fine anno - Soluzioni

Matteo Salicandro – 30 Maggio 2022

### 1. Sveglia presto [400]

Il primo obiettivo del problema è scrivere 1 come somma algebrica di addendi $\pm 3, \pm 6, \pm 5, \pm 7$. Detta $P$ la somma degli addendi positivi e $N$ la somma degli addendi negativi sappiamo che $P - N = 21$ e $P + N = 1$ da cui $P = 11, N = -10$. Segue che quindi $1 = -3 + 6 + 5 - 7$ da cui ricaviamo che $a$ è dispari, $b$ è pari, $c$ è pari, $d$ è dispari. Dato che abbiamo a che fare con interi positivi minori di 10, allora $a, d$ possono essere scelti in 5 modi; mentre $b, c$ in 4 modi. La risposta è $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 400$.

### 2. Panino a casa [5]

Detto $P$ il numero di patatine e $A$ il numero di ali di pollo notiamo che vale la relazione $2P+31A = 300$ da cui $P = (300-31A)/2$, ossia $A$ è pari e minore di 10 ma maggiore di 0 così come $P$. Le coppie $(P, A)$ che soddisfano l'equazione sono quindi 5 in quanto $A = 0, 2, 4, 6, 8$. La risposta è 5.

### 3. Pacciani va bene? [0]

Dimostreremo che i punti $Q, R$ coincidono. Dal momento che $P, Q$ sono dei punti tali che $\widehat{APO} = \widehat{AQO} = 90°$ si sa che $AP, AQ$ sono tangenti a $\omega_1$ e inoltre $APOQ$ è un quadrilatero ciclico. Da tale ciclicità segue che $\widehat{AOP} = \widehat{ARP}$. Tuttavia dal parallelismo di $OA$ e $P'R$ segue che $\widehat{AOP} = \widehat{RP'P} = \widehat{ARP}$, da cui $AR$ tangente a $\omega_1$. Ma siccome $R \neq P$ allora necessariamente $Q, R$ sono coincidenti. Il segmento è nullo, quindi la risposta è 0.

### 4. Un bel gruppo! [6]

Rischiviamo l'equazione come:

$$a^2b^2 - 5a^2b - ab + 5a - b^2 + 7b = 11$$

Sottraiamo 10 (perché mai? Lo vedremo più avanti...) da ambo i membri, otterrremo:

$$a^2b^2 - 5a^2b - ab + 5a - b^2 + 7b - 10 = 1$$

Scomponiamo ora:

$$(b - 5)(a^2b - a - b + 2) = 1$$

Segue che $b - 5 = \pm 1$. Se $b = 6$, otteniamo $6a^2 - a - 4 = 1$ ossia $6a^2 - a - 5 = 0$, che ha come unica soluzione intera $a = 1$, da cui ricaviamo la coppia $(1, 6)$. Se $b = 4$ si ottiene $4a^2 - a - 2 = -1$ ossia $4a^2 - a - 1 = 0$ che non ha soluzioni intere. L'unica soluzione è $(a, b) = (1, 6)$. La risposta è 6.
**Commento:** Sottrarre 10 ad ambo i membri può venire più o meno spontaneo guardando i coefficienti, si nota che sostituendo $b = 5$ nel membro di sinistra, tutti i coefficienti che contengono $a$ si annullano, quindi aggiungendo (o togliendo) una costante opportuna il polinomio può risultare divisibile per $b - 5$, semplificando la scomposizione e quindi il problema.

### 5. Il gioco di liberi e prigionieri [1018]

Siccome $k = 11$, sono liberi tutti i numeri che non sono divisibili per $p^{11}$ con $p$ primo. Se $N < 200000$ è un libero, notiamo che $2^{11} = 2048$ e $3^{11} = 177147$. Segue che tutti i multipli di $2^{11}$ verranno pronunciati, ma verrà pronunciato anche $3^{11}$. Il massimo numero di liberi consecutivi è sicuramente 2047, tuttavia vediamo chi sono i prigionieri più vicini a $3^{11}$: essi sono $86 \cdot 2^{11}$ e $87 \cdot 2^{11}$. Il primo differisce da $3^{11}$ per 1019, il secondo per 1029. L'intervallo più stretto di liberi va quindi da $86 \cdot 2^{11}$ a $3^{11}$, estremi esclusi. Vanno quindi contati quanti sono gli interi da $86 \cdot 2^{11} + 1$ a $3^{11} - 1$, che sono 1018. La risposta è 1018.

### 6. AlcOldeman [1525]

Suddivideremo in casi, dal momento che esiste almeno un punto in cui la funzione è uguale a 3, ha come codominio $\mathbb{Z}^+$, è debolmente crescente e due termini successivi differiscono di al più 1.
**Caso 1:** $Shot(1) = 1$ Prima o poi dobbiamo trovare il termine che rende la funzione Shot uguale a 3. Per questo, se consideriamo le differenze $Shot(i + 1) - Shot(i)$ che possono essere pari solo a 0 o a 1, e sono 9, visto che $Shot(1)$ è fissato, almeno due di queste differenze devono essere pari a 1. Le stringhe binarie di lunghezza 9 che hanno almeno due cifre "1" sono $2^9 - 1 - 9$ poiché abbiamo 1 stringa con 0 cifre "1" e 9 stringhe con una cifra "1"
**Caso 2:** $Shot(1) = 2$ Con ragionamento analogo al Caso 1, in questo caso c'è almeno una differenza pari a 1. Possiamo quindi scegliere le differenze in $2^9 - 1$ modi.
**Caso 3:** $Shot(1) = 3$ Ultimo caso, in quanto $Shot(1)$ è il minimo di $Shot(x)$ data l'ipotesi di crescenza debole. In questo caso tutte e 9 le differenze possono essere scelte a nostro piacimento, per un totale di $2^9 = 512$ funzioni.
In definitiva, la risposta è $2^9 - 1 - 9 + 2^9 - 1 + 2^9 = 1525$.

### 7. Il regalo di Noemi [101]

Traduciamo il problema, dato che i numeri di $m$ cifre minori o uguali a 3 sono $3^m$ e i numeri di cifre minori o uguali a 7 sono $7^m$. Il problema ci dice che $3^m - 1$ è un multiplo di 100, così come $7^m - 1$. Scrivendo la successione delle potenze di 3 modulo 100 otteniamo $3 - 9 - 27 - 81 - 43 - 29 - 87 - 61 - 83 - 49 - 47 - 41 - 23 - 69 - 7 - 21 - 63 - 89 - 67 - 1$ ossia $m = 20$ è il più piccolo intero positivo tale che $3^m - 1$ sia divisibile per 100. Scrivendo la successione delle potenze di 7 modulo 100 otteniamo $7 - 49 - 43 - 1$ ossia $m = 4$ è il più piccolo intero positivo tale che $7^m - 1$ sia divisibile per 100. Un valore possibile per $N$ ci viene dato da ogni $m$ che è multiplo sia di 4 che di 20, ossia multiplo di 20. Dato che i multipli di 20 minori di 2022 sono 101, la risposta è quindi 101.

## 8. Il furto della mascotte [8854]

Chiaramente $APRQ$ è ciclico. Per la tangenza di $BRP$ e $CRQ$ alla retta $AR$ avremo inoltre $\widehat{ABC} = \widehat{ABR} = \widehat{PRA} = \widehat{PQA}$ e similmente $\widehat{ACB} = \widehat{ACR} = \widehat{QRA} = \widehat{QPA}$. Segue quindi che $\widehat{BPQ} = 180 - \widehat{QPA} = 180° - \widehat{ACB}$, cioè $BPQC$ è anch'esso un quadrilatero ciclico. Possiamo dire quindi che $AP \cdot AB = AR^2 = AC \cdot AQ$. Calcolando similmente la potenza di $B$ e $C$ rispetto alla circonferenza passante per $A, P, R, Q$ abbiamo che $BP \cdot BA = BR^2$ e $CQ \cdot CA = CR^2$. Ma allora $AR^2 + BR^2 = BP \cdot BA + AP \cdot BA = AB^2$ il che implica che $\widehat{ARB} = 90°$, e similmente $\widehat{ARC} = 90°$. $AR$ è quindi l'altezza uscente da $A$ nel triangolo $ABC$ e dato che l'area è $1200\sqrt{5}$, $AR = 30\sqrt{5}$, da cui trovo $BR = 20, CR = 60$. $P, Q$ sono le proiezioni di $R$ sui lati $AB, AC$ quindi $PB = 20\cos(\widehat{ABC})$ e quest'ultimo coseno è pari a $2/7$. Allora $PB = 40/7$, da cui $AP = 450/7$. I triangoli $APQ$ e $ACB$ sono simili e da $AP : AC = AQ : AB$ troviamo che il rapporto di similitudine è pari a $5/7$, quindi il rapporto tra le aree di $APQ$ e $ABC$ è pari a $25/49$. Da questo segue che l'area di $APQ$ è $25/49 \cdot 1200\sqrt{5} = \frac{30000}{49}\sqrt{5}$. Per differenza l'area di $BPQC$ sarà quindi $1200\sqrt{5} - \frac{30000}{49}\sqrt{5} = \frac{28800}{49}\sqrt{5}$. La risposta è quindi 8854.

## 9. Prossimi cinque! [3721]

Vediamo che cosa succede in ogni singola fila: denotiamo con $\longrightarrow$ un concorrente con la mano destra alzata e con $\longleftarrow$ un concorrente con la mano sinistra alzata. Le due frecce, in ogni singola fila, non si possono scontrare. Le configurazioni possibili sono quindi, in ogni fila:

$$\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$$

$$\longleftarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow$$

$$\cdots$$

$$\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow$$

Per un totale di 6 configurazioni possibili per ogni fila. La risposta è quindi $6^{60}$ il cui numero dei divisori è $61 \cdot 61 = 3721$.

## 10. Ombrello rotto [119]

Suddividiamo in casi: dimostreremo che $g(n) = 2$ per $n$ pari diverso da 2, altrimenti $g(n) = 1$.
**Caso particolare:** $n = 2$. Il polinomio $x^2 + 2x + 1$ ha come unica radice reale (distinta) $x = -1$.
**Caso 1** $n$ è dispari. Sia $p_n(x) = x^{2k+1} + 2x + 1$. Derivando $p_n(x)$ otteniamo $p'_n(x) = (2k+1)x^{2k} + 2$. Dal momento che $p'_n(x)$ è sempre crescente e ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale, si ha che la radice è unica, quindi $g(n) = 1$ per ogni $n$ dispari.
**Caso 2** $n$ è pari. Sia $p_n(x) = x^{2k} + 2x + 1$. Intanto $p_n(-1) = 0$, quindi una radice reale esiste. Derivando ottengo: $p'_n(x) = (2k)x^{2k-1} + 2$ da cui troviamo che la funzione polinomiale in questione ha un solo punto di minimo che sta sotto l'asse $x$, quindi le radici sono complessivamente 2 in quanto ponendo $p'_n(x) = 0$ ottengo $x = \sqrt[2k-1]{-\frac{1}{k}}$ che è effettivamente un punto unico.
La risposta è data da: $g(1) + g(2) + \cdots + g(80)$ e quindi $40 \cdot 1 + 39 \cdot 2 + 1 = 40 + 78 + 1 = 119$. La risposta è 119.

## 11. Navetta in tilt [210]

Notiamo che la navetta segna il numero corretto di chilometri, come se fosse scritto in base 7. Quindi bisogna trovare tutti i numeri $N$ che se scritti in base 7 hanno le stesse cifre di $2N$ in base 10. Dal momento che $100 < N < 500$ scriviamo l'uguaglianza:

$$2(49a + 7b + c) = 100a + 10b + c$$

Svolgendo i conti e portando quante più cose possibili a destra otteniamo:

$$2a - 4b - c = 0$$

E ricordiamo che $a, b, c$ sono interi non negativi minori o uguali a 9, ma dal fatto che $N < 500$ ricaviamo che $a < 5$. Per $a = 4$ troviamo come soluzione che massimizza $N$ gli altri elementi della quadrupla: $b = 2, c = 0$. Quindi $N = 420$, che in base 10 corrisponde a $49 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 210$. Il massimo numero di chilometri reali percorsi è 210. La risposta è 210.

## 12. Tiziana: beccata [900]

Troviamo prima di tutto il numero di anagrammi impronunciabili, chiamando, per comodità di notazione **X** il blocco **YY**. Gli anagrammi di **TGANAX** sono $\frac{6!}{2!} = 360$. Gli anagrammi totali sono invece $\frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$. Gli anagrammi pronunciabili sono in definitiva $1260 - 360 = 900$. La risposta è 900.

## 13. Il canale senza protezioni [727]

Sia $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$ e denotiamo $S_n = a^n + b^n + c^n$. Per comodità di notazione supponiamo inoltre $Q = ab + bc + ca$. Allora $r^3 = S_1 r^2 - Qr + abc$ per ogni radice $r$ di $P(x)$. Segue che $S_3 = S_1 S_2 - QS_1 + 3abc$. Esprimendo $S_2$ in funzione di $S_1$ e $Q$ otteniamo che $S_2 = S_1^2 - 2Q$, da cui troviamo che:

$$S_3 = S_1(S_1^2 - 2Q) - QS_1 + 3abc$$

Notiamo inoltre che $S_{-1} = Q/abc$ quindi posso dire anche che $Q = 5abc$. Quindi:

$$S_3 = S_1(S_1^2 - 10abc) - 5abcS_1 + 3abc$$

Ora, $S_1 = 10$ e $S_3 = 420$. Sostituisco:

$$420 = 10(100 - 10abc) - 50abc + 3abc$$

In definitiva: $420 = 1000 - 100abc - 50abc + 3abc$ ossia $abc = 580/147$, che è un numero complesso con parte immaginaria nulla. La risposta è 727.

### 14. Inizia la finale a squadre! [653]

Sia $X$ l'intersezione tra $AB$ e $CD$. Allora per differenza di angoli $\widehat{AXD} = 90°$. Segue che nel triangolo rettangolo $AXD$ si ha $AX = 50$, $XD = 50\sqrt{3}$, da cui per differenza $XB = 40, XC = 50\sqrt{3} - 20$. Possiamo trovare quindi l'area di $ABCD$ come differenza tra l'area di $AXD$ e l'area di $XBC$, anch'esso triangolo rettangolo. L'area di $AXD$ è data da $50 \cdot 50\sqrt{3}/2 = 1250\sqrt{3}$, mentre l'area di $BXC$ è data da $40 \cdot (50\sqrt{3} - 20)/2 = 20 \cdot (50\sqrt{3} - 20)$. In definitiva:

$$S_{ABCD} = S_{AXD} - S_{BXC} = 1250\sqrt{3} - (1000\sqrt{3} - 400) = 250\sqrt{3} + 400$$

La risposta è $250 + 3 + 400 = 653$.

### 15. Ferraris di Torino, Dini di Pisa, Ferraris di Torino, Dini di Pisa! [241]

Dividiamo ogni riga del sistema per $3^i$. Sia:

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(x - \frac{1}{3^{2022}}\right)$$

Allora possiamo dire che $p(x) = x^{2022} + t_{2021}x^{2021} + t_{2020}x^{2020} + \cdots + t_1x + P$ con $P = \prod_{i=1}^{2022} 3^{-i}$. Ci viene chiesta la somma dei coefficienti escluso il coefficiente direttore e il termine noto, notoriamente pari a $p(1)$. Calcoliamo:

$$p(1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \frac{3^{2022} - 1}{3^{2022}}$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^{2022} t_i = p(1) - 1 - P = \frac{(3-1)(3^2-1)\ldots(3^{2022}-1) - (3^1 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot 3^{2022}) - 1}{3^1 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot 3^{2022}}$$

Cerchiamo ora di capire qual è il massimo $k$ tale che $3^k$ divida il numeratore. La quantità

$$(3-1)(3^2-1)\ldots(3^{2022}-1) - 1$$

è divisibile per 3 in quanto congrua a $(-1)^{2022} - 1$ modulo 3, ma non per 9. Infatti modulo 9 la quantità in questione diventa: $2 \cdot (-1)^{2021} - 1 = -3$. Possiamo dire quindi che il numeratore è dato da $-3^{2022 \cdot 2023/2} + 3k$ con $k$ non multiplo di 3. In definitiva, raccogliendo, otteniamo $3(k - 3^{2022 \cdot 2023/2-1})$, dal momento che l'ultima parentesi non è multipla di 3, si ricava che il numeratore e il denominatore hanno massimo comun divisore uguale a 3. Il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini è pari quindi a:

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot 3^{2022}$$

Per il teorema di Eulero sarà sufficiente calcolare le ultime 3 cifre di $3^{2022 \cdot 2023/2-1 \pmod{400}}$ ossia le ultime 3 cifre di $3^{52}$. Con alcuni conti, noiosi, ma banali, si giunge alla risposta 241.

### 16. Un folto gruppo di laziali [2544]

I punti $Q_A, Q_B, Q_C$ sono i punti medi dei lati $BC, CA, AB$ e il punto in cui le oche si incontrano ($X$, ovvero) è il baricentro di $ABC$. Similmente, per il lemma incentro-excentro, la circonferenza per l'$A$-excentro, $B, C$ ha centro nel punto medio dell'arco $BC$ non contenente $A$, e similmente per gli altri vertici. Tale circonferenza passa anche per l'incentro di $ABC$, il che ci informa che $Y$ è l'incentro di $ABC$. Dal momento che la papera percorre la retta $XY$ senza più incontrare la retta $BC$, deduciamo che la retta $GI$ (con $G$ baricentro e $I$ incentro di $ABC$) è parallela al lato $BC$. Questo vuol dire che $G, I$ hanno la stessa distanza da $BC$, in altre parole, l'area di $BGC$ è uguale all'area di $BIC$. Un fatto noto è che l'area di $BGC$ sia uguale a $S/3$ dove $S$ è l'area di $ABC$. Il raggio della circonferenza inscritta è dato dalla forma $S/p$ dove $p$ è il semiperimetro del triangolo $ABC$. Segue quindi che l'area di $BIC$ è pari a $1/2 \cdot BC \cdot S/p = S/3$ da cui ricaviamo che $BC = 2p/3$. Da quest'ultima uguaglianza ricaviamo che il perimetro di $ABC$ è pari a 6066. Ergo il lato mancante misurerà $6066 - 1500 - 2022 = 2544$. La risposta è 2544.

### 17. La benedizione di Saracino [672]

Sia $C_i$ il numero di birre presenti nella cassa $i$. Vogliamo che $C_1, C_2, \ldots, C_{2022}$ siano tutti distinti modulo 2022. Supponiamo per assurdo che esista un $i \neq j$ tale che $C_i = C_j$ (in modulo 2022). Scrivo quindi $C_i = mi, C_j = mj$. Segue che $2022 \mid C_i - C_j$ ed equivalentemente $2022 \mid m(i-j)$. Non dovendo ciò mai accadere, $m$ deve necessariamente essere coprimo con 2022, dal momento che $i - j \leq 2021$. Quindi la situazione si verifica solo per $m$ coprimo con 2022; ergo calcoliamo $\phi(2022) = 672$. La risposta è 672.

### 18. Sobri, brilli e ubriachi [33]

Sia $S$ il numero di sobri, $B$ il numero di brilli e $U$ il numero di ubriachi. Sappiamo che $S + B + U = 40$. In base alle risposte sì e no, possiamo invece dire che $S + B + 2U = 47$ e $2S + 2B + U = 73$. Sottraendo la prima equazione dalla seconda ricaviamo che gli ubriachi sono $U = 47 - 40 = 7$. Segue che tra sobri e brilli ci sono 33 persone. La risposta è quindi 33, ossia il massimo numero possibile di brilli.

**19. Farfalla e Mattone [2501]**

Riscriviamo la somma come segue:

$$1-\frac{1}{1+2}+1-\frac{1}{1+2+3}+1-\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+1-\frac{1}{1+2+\cdots+50}$$

Sommando e riscrivendo i denominatori diversamente:

$$49-\left(\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{50\cdot 51}\right)=49-2S$$

La somma $S$ è una somma telescopica:

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{50}-\frac{1}{51}=\frac{1}{2}-\frac{1}{51}=\frac{49}{102}$$

Il risultato è $49-\frac{49}{51}=\frac{2450}{51}$ la cui somma di numeratore e denominatore è 2501. La risposta è 2501.

**20. I biscotti di Valeria [7]**

Il pescaggio dei biscotti può avvenire in $\binom{12}{10}$ modi. Di questi modi, quelli che consentiranno a Rubens di picchiare Christian sono le estrazioni in cui compaiono solo biscotti buoni: sono esattamente $\binom{11}{10}$. La probabilità è quindi $\frac{22}{12\cdot 11}=\frac{1}{6}$.
La risposta è 7.