

Fugassa Cup

Una gara di Badalucco Valentino e Salicandro Matteo – 22 Novembre 2021

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se un problema ha due o più soluzioni, o la risposta vale infinito, si indichi 9999.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre (se non diversamente indicato).**

Scadenze Importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Ringraziamenti

- Si ringrazia il prof. Sandro Campigotto per aver dato spazio sul sito phiquadro.it a questa gara.
- Si ringrazia Leonardo Franchi per aver aiutato a testare alcuni dei problemi.
- Si ringrazia Valentino Badalucco per avermi offerto una slerfa di fugassa.



Questa foto potrebbe tornare utile nel problema 6...

Da sinistra: Bobby, Arec, Mattysal, Guide, Badda e Taulant.

1. Dalla Puglia alla Liguria con furore

Mattysal parte finalmente per la Liguria facendo un viaggio un po' tortuoso... prima in aereo da Brindisi a Malpensa, e poi il treno da Malpensa a Milano Centrale... e infine il treno da Milano Centrale a Genova! 6 ore di puro stress! Era inoltre tormentato da un problema che gli ha fatto venire un'emicrania tale che, se avesse sofferto l'atterraggio dell'aereo, probabilmente avrebbe sofferto molto meno. Proprio durante l'atterraggio, si chiese infatti quanti sono gli interi positivi minori di 100 che si possono scrivere nella forma $ac + bd + cb + da$, con a, b, c, d interi positivi! Siccome Mattysal è genovese dentro e non vuole spendere soldi per l'Okì, sai aiutare a trovare la risposta al suo problema?

2. Belin fa caldo, ci vuole una freddura!

Il trentino Taulant ospite a casa di Badda incontra, assieme a Badda, Mattysal alla stazione di Sestri Ponente, una delle innumerevoli stazioni di Genova! Siamo oltre metà luglio, e si muore di caldo. Mattysal decide quindi di raffreddare il tutto con una freddura!

- Sapete perché il numero 720 grida? - chiede Mattysal. - E perché mai? - chiede Taulant. - Perché ha esclamato 6. - risponde Mattysal. Dopo tale affermazione, invece, Badda, anziché piangere, chiede: - Sai cosa chiede Badda ai foresti per vedere se sono degni di entrare in casa sua? -

- Se in casa mia vuoi entrare, trova la somma di tutti gli interi n tali che $n + 4$ e $4n - 163$ siano entrambi quadrati perfetti. - chiede Badda.

A quel punto, nonostante Mattysal sia abituato al caldo intenso del Sud Italia, sviene per il caldo.

3. La pizza serale

Il nostro Guide dichiara testuali parole: - Voglio una mavghevita! -

Il fantastico Lorenzo Guidei, alto quanto la lunghezza del tratto ferroviario da Genova a La Spezia, fa finalmente conoscenza con Taulant e Mattysal. Tuttavia, non è un buon amante della teovia dei numevi, quindi, in attesa della sua pizza mavghevita cita:

- Pvendete un polinomio $p(x)$, monico di tevzo gvado, avente tutte le vadici inteve positive. Sapendo che $q(x) = p(x) + p(-x)$ è un polinomio di secondo gvado avente come coefficiente di secondo gvado -62, calcolate quanto può valeve al massimo $|q(0)|$. -

Giunge il cameriere, finalmente, con le pizze tanto attese, divorate in una frazione di secondo da parte di Guide, Badda, Taulant e Mattysal

4. La tua pizza è più grande della mia!

Badda: - È un'ingiustizia! Le pizze sono tutte perfettamente rotonde... ma prendendo un quadrato $ABCD$, sia M il punto medio di BC e N il punto medio di CD . AN e DM si intersecano in X . Fin qua ci sei? -

Guide: - Sì, ma dove vuoi avvivare? -

Badda: - Stammi bene a sentire, il vappovto (scusa, volevo dire 'rapporto') tra il raggio della mia pizza e il raggio della tua pizza è uguale al rapporto tra il raggio della circonferenza circoscritta a XMC e il raggio della circonferenza circoscritta a XBA . Uh, buona questa pizza, però! Peccato per quest'ingiustizia!

Quanto vale il rapporto tra l'area della pizza di Guide e l'area della pizza di Badda assumendo le pizze bidimensionali? Detto R tale rapporto, indicare come risposta $1000R$.

5. Cos'è un poggiolo?

I 7 genovesi (di cui due foresti, come si suol dire da queste parti) si avventurano, dopo aver beccato gli altri del Cassini vicino la stazione di Genova Brignòle (non è così che si legge!) tra i vicoli della zona... finché non si sbuca davanti ad un edificio abbastanza noto... è il Cassini di Genova! Bobby cita: - Guarda quel poggiolo! -

Mattysal ribatte: - Cosa? -

Badda quindi: - Non sai cos'è un poggiolo? È un balcone, in italiano! - Mattysal risponde: - Belin, non lo sapevo! Questo poggiolo pare un triangolo ABC in cui la bisettrice uscente da A interseca il lato opposto nel punto D e la mediana uscente da B interseca il lato opposto nel punto E . -

Badda: - E se noti, AD e BE sono perpendicolari! -

Mattysal: - Caspita, è vero. Poi sembra proprio che i lati non si sappiano...-

Bobby: - Qualcuno dice che $AC + BD = 72$ e $AB + CD = 66$.-

Mattysal: - E se così qualcuno dice, penso proprio di essere in grado di calcolare BC . E esso vale... -

Arec: - Zitto, ci sto provando io! -

E tu, sai quanto vale BC ?

6. La foto in Piazza De Ferrari

Litta, il nostro fotografo di fiducia, fa una foto al gruppo dei genovesi, foresti inclusi. - Mi dite quanti anni avete? - chiede Litta.

- 17 - rispondono Bobby e Badda.

- 18 - rispondono Mattysal, Guide e Arec.

- 19 - risponde Taulant.

- Ok, ora disponetevi da sinistra verso destra, di fronte a me, in modo tale che almeno uno di voi abbia sulla propria sinistra una persona con età minore della propria. -

In quanti modi si potevano disporre i sei ragazzi per fare la foto? E tra tutti questi modi, uno di questi è proprio quello che potete ammirare in copertina.

7. È arrivato Tuske!

Direttamente da Modena, con il regionale Rock Ravenna-Brignòle (non è così che si legge!) giunge il gran moldavo Tuske che ci ha raccontato di aver risolto IMO2021/1 in treno! Non ci ha messo mica poco, però, ci ha messo tanti minuti quanti sono gli interi positivi $N \leq 2021$ tali che se definiamo:

$$f(N) = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2 + N^2}{1 + 2 + \dots + (N-1) + N}$$

allora $f(N)$ è un numero intero. Quanti minuti ha impiegato il nostro moldavo di fiducia a risolvere IMO2021/1?

8. La colazione dei campioni!

Badda, Tuske, Taulant e Mattysal decidono quindi di fare colazione in un bar di Genova vicino la famosa chiesa di S. Lorenzo.

- State per assaggiare la colazione dei campioni, focaccia e cappuccino, signore e signori! - afferma Badda.

5 minuti dopo, il cameriere giunge presso il tavolo dei quattro amici con ben 8 slerfe di focaccia, tutte identiche.

- Adesso, queste 8 slerfe di focaccia devono essere tutte distribuite tra di noi. Tuttavia, siccome oggi mi sento sadico, almeno uno di voi deve rimanere senza focaccia. - afferma Badda.

- Ok, ma se rimani tu senza focaccia va bene ugualmente? - chiede Taulant

- Sì, certo, ad esempio se tu ricevi 3 slerfe, Taulant 2, e io 3 allora va bene... perché Tuske non ne riceve nemmeno una. -

- Ma io ho fame... e se le ricevo tutte e 8 io e voi 3 restate a digiuno? - ribatte Tuske.

- Anche questo è un modo legale di distribuire le slerfe di focaccia, ma almeno uno di noi deve restare a digiuno. - ribatte Badda.

In quanti modi si possono distribuire le 8 slerfe di focaccia tra i quattro amici rispettando la condizione che almeno uno di loro resti a digiuno?

9. I 18 anni di Mattysal in ritardo

Mattysal decide di festeggiare il suo compleanno, seppure con molto ritardo. Ha infatti fatto 18 anni il 17 Aprile 2021 e oggi, 21 Luglio 2021 decide di festeggiare il suo compleanno. Taulant gli ha infatti comprato una torta al triplo cioccolato con su scritto "Auguri Matteo", ma senza 18. Ha infatti espresso l'età fino alla seconda cifra decimale, scrivendo 18,26 perché infatti erano passati circa 3 mesi, cioè il 25% di un anno. Ma quanti giorni erano passati esattamente dal suo diciottesimo compleanno?

N.B: Si intende che, ad esempio, è passato un giorno dal 17 Aprile 2021 se è il 18 Aprile 2021, due giorni se è il 19 Aprile 2021... e così via.

10. Kaboom!

Badda ci ha provato a prendere uno spumante per festeggiare Mattysal... tuttavia, inspiegabilmente, questo spumante esplose all'improvviso, suscitando particolare stupore nei presenti (3 stranieri: Taulant, Tuske e la tipa di Badda, e i restanti 2 italiani). Una volta che il tappo salta in aria, Badda lo aggiunge alla sua collezione di tappi: finalmente la completa, sono nove tappi identici disposti sui vertici di una griglia quadrata 3×3 . Ebbene, poi si chiede: quanti sono i possibili triangoli non degeneri che hanno come vertici tre qualsiasi dei tappi in questione?

Taulant: -Beviamo, che è meglio.-

11. Piggite o bigétto anche pe doe fermate

Gli slogan del trasporto pubblico locale colgono l'attenzione di Taulant, in particolare, non si spiega come può un autobus fatto di carta circolare. Eppure uno slogan molto diffuso è 'L'autobus è fatto di biglietti'. È interessante dire che c'è una linea di trasporto pubblico avente 7 fermate F_1, F_2, \dots, F_7 . Il biglietto tra due qualsiasi fermate costa 0,20 euro a fermata. Ad esempio il biglietto tra F_3 e F_5 costa 0,40 euro mentre il biglietto tra F_6 e F_7 costa 0,20 euro. Si narra che oggi c'è, per ogni possibile tratta, esattamente una persona che ci viaggia (con il biglietto, anche pe doe fermate). Sulla base di queste informazioni, qual è la spesa media per un biglietto oggi, espressa in decimillesimi di euro?

12. Pasta col sugo di noci flambé!

Taulant: - Se proprio devi fare la pasta col sugo di noci flambé, non conviene farla in casa, altrimenti salta tutto! Se proprio vuoi farla, falla giù al piano terra... almeno salta tutto il palazzo! -

Tuske: - Qualcuno ha detto ENNE? -

Taulant: - No, ho detto flambé... però senti qua: prendi due interi positivi $1000 \leq n < m \leq 9999$. Diciamo che la coppia (m, n) è *facilmente sottraibile* se accade che la sottrazione $m - n$ si può effettuare in qualsiasi ordine, perché non è necessario il famoso prestito delle decine. -

Tuske: - Aspe', spiegati meglio... -

Taulant: - Per esempio, la coppia $(6873, 2421)$ è facilmente sottraibile perché se fai in colonna tale operazione, non è necessario che tu presti decine. Infatti $\overline{6873} - \overline{2421} = \overline{(6-2)(8-4)(7-2)(3-1)} = 4452$. -

Tuske: - Quindi $(3872, 2583)$ non lo è perché non posso dire che $\overline{3872} - \overline{2583} = \overline{(3-2)(8-5)(7-8)(2-3)}$. -

Taulant: - Esatto! -

Badda: - Ma come si facevano le sottrazioni in colonna! -

Taulant: - Che ti importa, tanto esistono le coppie facilmente sottraibili. A proposito, se $1000 \leq n < m \leq 9999$, quante sono le coppie (m, n) facilmente sottraibili? -

13. Ancora Genova... mi saltano i Nervi

In treno... passando per le stazioni di Genova Sestri Ponente Aeroporto, Genova Cornigliano, Genova Sampierdarena, Genova Piazza Principe, Genova Brignole, Genova Sturla, Genova Quarto, Genova Quinto, Genova Nervi, Genova... ah no, basta così, dopo c'è Bogliasco. Dopo una quantità incalcolabile di tempo trascorsa in treno, i quattro scendono dal treno...

Badda: - Benvenuti ai parchi di Nervi! -

Tuske: - Fantastico! Che pace, belin... -

Badda: - Se mi seguite vi porto sulla passeggiata di Nervi, un tragitto circolare lungo 300 metri. -

Mattysal: - Ok, facciamo che partiamo tutti dallo stesso punto, camminando a 2 metri al secondo e percorro la passeggiata in senso orario così avrò il tramonto sulla sinistra. Tu, Badda, invece, percorri in senso antiorario a 3 metri al secondo, perché sei più veloce... così avrai il tramonto sulla destra... Scusa, ho l'occhio destro troppo sensibile. -

Badda: - Ok, continuiamo a percorrere la passeggiata a velocità costante. Tra quanto tempo (in secondi) ci incontreremo di nuovo al punto di partenza? A quel punto torniamo a casa. -

Taulant: - E se a casa non ci tornate più? Dai, che io ho il treno. Vabbè, in tal caso, scrivete come risposta 0. -

Il tempo non bastò a Taulant, che, di ritorno verso Trento, perse la coincidenza a Milano.

14. Il cartello giallo di Sant'Ilario

Ricordando meglio quella giornata, Badda teneva particolarmente a farci fare un giro interminabile ed inspiegabilmente lungo per arrivare alla passeggiata, passando da diverse creuze, finché eccolo...

- Ecco la stazione! - esclamò Badda.

- Ma ci sono dei panni stesi... - Mattysal disse osservando l'edificio.

- Adesso nel palazzo vivono delle persone.

- Ma quante volte sei stato qui?! - chiedono in coro Mattysal e Tuske.

- Beh, se tu calcoli la somma:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{17 \cdot 20}$$

e poi la esprimi nella forma m/n con m, n interi coprimi tra di loro, ci sono stato esattamente $m + n$ volte.

Quante volte è stato Badda a Sant'Ilario? Lo chiamavano Bocca di Rosa, metteva l'algebra sopra ogni cosa.

15. Maniman che ciêuve!

Nonostante le due giornate di bel tempo, siamo sempre in Liguria, che è famosa per i suoi acquazzoni e le sue bellissime allerte per dissesto idrogeologico...

- Guarda, una nuvola! - Esclama Tuske.

- Ommioddio annegheremo, si salvi chi può - Gridò terrorizzato Mattysal, le cui aspettative di temporale non superano l'umidità della rugiada.

- Calmati, non c'è neanche allerta, infatti non è nemmeno la stagione delle piogge!

- E quando è?

- Inizia sempre il 3 Ottobre, dopo il mio compleanno, ma non dura mai lo stesso numero di giorni!

- E come fai a sapere quanto durerà quest'anno?

- Sei fortunato, quest'anno è semplice: basta contare il numero di giorni trascorsi dall'inizio: infatti sai che finirà quando esso sarà pari alla somma dei prodotti dei coefficienti non nulli di tutti i polinomi P di grado 3 a coefficienti interi positivi ≤ 10 tali che $P(P(n))$ sia multiplo di $P(n)$ per ogni n naturale. - Beh prendiamo l'ombrello, maniman!

Appena scesi alla stazione, nel paesino di Sant'Ilario, Tuske si accorse con uno sguardo che il coefficiente non era per forza unitario.

16. Le piadine le fanno gli gnomi!

Mattysal ha una gran voglia di piadina... tuttavia questo desiderio suscita la disapprovazione di Badda.

- Le piadine le fanno gli gnomi! - dichiara Badda.

- Intendi i sette di Biancaneve? - chiede Mattysal.

- No... però sai dirmi quanti sono i numeri di tre cifre con la somma delle cifre minore o uguale a 7? - chiede Badda.

- Ti so rispondere solamente se mi fai mangiare una piadina... Crudo e pancetta affumicata! ADESSO! - grida Mattysal.

Questo problema si conclude con Mattysal che rimarrà triste tutta la sera, perché la piadineria aveva finito il prosciutto crudo. Non è riuscito a calcolare a quantità richiesta da Badda. Forse se lo aiutate, è meglio.

17. Cinque Terre, arriviamo!

Badda e Mattysal prendono un treno per La Spezia (Toscana) in direzione Monterosso, che improvvisamente si ferma a pochi chilometri da Bogliasco. - Perché il treno è fermo? - chiede Mattysal.

- Perché è stanco e si deve riposare. - risponde prontamente Badda, anche se è perplesso perché il posto preferito per i treni per riposare è, solitamente, la galleria tra Genova Brignole e Genova Piazza Principe, secondo lui.

Giunti a Lavagna, Guide raggiunge Badda e Mattysal. Senza nemmeno salutare, inizia a parlare. E dice...

- Quante sono le terne ordinate di interi (p, q, r) tali che $p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr + 7$? - chiede Guide.

- Innanzitutto, buongiorno. Poi, non sono infinite, visto che p, q, r sono numeri interi? - chiede Badda.

- Non lo so, se così dovesse essere dichiara 9999. Anche $x^2 = 3y + 2$ ha infinite soluzioni negli interi, se non erro. -

- Ma non dovevamo scendere a Levanto? - chiede Mattysal.

18. A Vernazza!

A Vernazza, in provincia di La Spezia, i tre amici vengono colti da una terribile sete che li guida presso un bar locale, dove prendono due limonate e una spremuta d'arancia (ma non era forse estate?).

- Voglio un litro di limonata! - esclama Guide.

Il cameriere torna dopo un po' con un bicchiere a forma di piramide retta, regolare, a base quadrata, completamente pieno.

- Eccoti servito! Un bicchiere completamente pieno di un litro di limonata! Una curiosità: questo bicchiere ha la misura del lato della base che è un numero intero se espressa in centimetri, così come l'altezza. - dice il cameriere.

- E allora qual è la somma dei valori che può assumere l'area di base, espressa in centimetri quadrati? - chiede Guide al cameriere.

Il cameriere, improvvisamente, scompare.

19. Plop plop plop plop

Dopo un bel giro presso le Cinque Terre (ovviamente in Toscana), Guide, Badda e Mattysal raggiungono Kim e Chot presso un ristorante di Sestri Levante per una cena a base di pesce.

- Ma che si mangia stasera? - chiede Kim.

- Dunque... antipasto con bruschette a base di pesce, poi pasta con il pescato del giorno... e poi frittura mista! - risponde Chot.

- Ma in cosa consiste questa frittura mista? - chiede perplessa Mattysal.

- Hai presente? Il pesce fritto? Il pesce fritto nell'olio bollente... bollentissimo, che fa "plop plop plop plop" - risponde Chot gesticolando.

- Una bottiglia di Mammalucco, grazie! - chiede Badda al cameriere.

- Questa bottiglia tarda ad arrivare... intanto sai dirmi qual è, in valore assoluto, la somma delle potenze seste delle radici del polinomio $p(x) = x^7 + 8x - 2$? - chiede Kim.

- È avvivato il Mammalucco! Ci sono anche le cozze gvatinate! - esclama Guide.

20. Regionale 12480

Badda: - Oh no, Mattysal si è perso! Sono le 22:33 e il treno doveva partire 3 minuti fa. -

Ma voi lo sapevate perché era fermo? No, davvero? Ora ve lo raccontiamo! Nel mentre, Chot trova finalmente Mattysal!

Chot: - Vieni, stiamo per partire! -

Mattysal: - Ma perché siete così silenziosi? -

Badda prega Mattysal di fare silenzio perché non aveva nessuna voglia di discutere con un controllore di Trenitalia.

Badda: (*parlando a bassa voce*) - Abbiamo causato il ritardo di un treno! È tipo illegalissimo! -

Mattysal: (*parlando ad alta voce*) - Ma come hai fatto? -

Badda: - Mi sono messo in mezzo alle porte coprendo i sensori, affinché queste non si chiudessero. Per farti capire meglio, c'era un triangolo ABC e sul lato BC erano presi due punti X, Y tali che $CA = CX$ e $BA = BY$. Detti M, N i punti medi di AX e AY , i sensori erano proprio M, N . Io mi trovavo esattamente nel punto V (come 'Valebadda') che era l'intersezione tra CM e BN , e l'angolo \widehat{MVA} valeva... Aspetta, non mi ricordo, so solo che $\widehat{BAC} = 86^\circ$, $\widehat{ABC} = 62^\circ$. -

Mattysal: - Certo che in geometria sei scarso... io non ero sui sensori eppure so quanto valeva l'angolo, sulla base di ciò che mi hai detto. Non è questione di memoria! - Qual era questa ampiezza in gradi?

Improvvisamente, giunti a Lavagna, Guide scompare.