Fugassa Cup - Soluzioni

Una gara di Badalucco Valentino e Salicandro Matteo – 22 Novembre 2021

1. Dalla Puglia alla Liguria con furore [73]

Vediamo quali sono gli interi positivi k esprimibili in tale forma: se $k = ac + bd + bc + da$ allora $k = (a + b)(c + d)$ ma essendo a, b, c, d interi positivi si avrà necessariamente $a + b \geq 2$ e $c + d \geq 2$. Quindi k è esprimibile in questo modo solo se è prodotto di due fattori maggiori o uguali a 2. Di conseguenza, ogni numero intero positivo k va bene, eccetto $k = 1$ e ogni k primo. I primi minori di 100 sono 25. La risposta è quindi $99 - 25 - 1 = 73$.

2. Belin fa caldo, ci vuole una freddura! [2021]

Se $n+4$ è un quadrato perfetto, anche $4n+16$ lo è. Ma dal momento che $4n-163$ è un quadrato perfetto, abbiamo due quadrati perfetti che differiscono di 179. Si tratta di risolvere $A^2 - B^2 = 179$ con $A > B$ interi. 179 è primo, quindi ci sono pochi casi. Se $A + B = 179$ e $A - B = 1$ si ricava $A = 90, B = 89$. Se $A + B = 1$ e $A - B = 179$ si ricavs $A = 89, B = 90$ ma in questo caso $A < B$. Se $A + B = -1$ e $A - B = -179$ (o viceversa), otteniamo in valore assoluto le stesse soluzioni di prima. Ma se $A = 90$ questo vuol dire che $4n + 16 = 90^2$ da cui $n = \frac{8084}{4} = 2021$, unica soluzione. La risposta è quindi 2021.

3. La pizza serale [2200]

Scrivo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Allora $p(-x) = -ax^3 + bx^2 - cx + d$ da cui $2b = -62$. Quindi $b = -31$. In particolare $a = 1$, quindi si può constatare che la somma delle radici intere positive di $p(x)$ è 31. Volendo massimizzare $|q(0)$ che è pari a $|2d|$, dobbiamo massimizzare d. d è massimizzato se le radici valgono $10, 10, 11$, caso in cui vale -1100. Dunque il massimo valore che può assumere $|q(0)|$ sarà $1100 \cdot 2 = 2200$.

4. La tua pizza è più grande della mia [2500]

Le rette AM e DN sono perpendicolari. Si può verificare con la geometria analitica ottenendo che il prodotto dei coefficienti angolari di tali rette è pari a -1. Il rapporto richiesto è quindi $\frac{AM^2}{MN^2}$ poiché i quadrilateri $ABMX$ e $NCMX$ e l'area di un cerchio dipende quadraticamente dal suo raggio. Supponiamo senza perdita di generalità che il lato del quadrato valga 1. Applicando il Teorema di Pitagora si ottiene $AM = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ da cui $\frac{AM^2}{MN^2} = \frac{5}{2}$. La risposta è quindi $1000 \cdot \frac{5}{2} = 2500$.

5. Cos'è un poggiolo? [60]

Il triangolo ABE è isoscele perché la bisettrice dell'angolo in A è perpendicolare alla base BE. Quindi $AB = AE$, ma se E è il punto medio di AC allora $2AB = AC$. Per il teorema della bisettrice vale quindi $2BD = CD$. Chiamiamo per comodità $AB = x, BD = y$. Allora si ha che $2x + y = 72$ e $x + 2y = 66$. Il lato BC sarà dato da $y + 2y = 3y$. Risolvendo il sistema si trova che $x + y = 46$, ossia $x = 26$ e $y = 20$. La misura di BC è quindi 60, mentre tutti gli altri tre lati del triangolo misurano $26, 52$. La risposta è quindi 60.

6. La foto in Piazza De Ferrari [708]

I modi totali sono $6! = 720$. A questi modi sottraiamo i modi in cui i sei ragazzi sono disposti in ordine debolmente crescente di età. Vanno prima i 17-enni, poi i 18-enni e infine i 19-enni. I 17-enni si possono distribuire in 2! modi, i 18-enni in 3! modi e l'unico 19-enne deve necessariamente restare sulla destra. I modi che non vanno bene sono quindi $2! \cdot 3! = 12$. La risposta è $720 - 12 = 708$.

7. È arrivato Tuske! [674]

È noto che la somma dei primi n quadrati è data da $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e la somma dei primi n interi positivi è data da $\frac{n(n+1)}{2}$. In definitiva:

$$f(N) = \frac{N(N+1)(2N+1)}{3N(N+1)} = \frac{2N+1}{3}$$

quindi $f(N)$ è intero se e solo se $N \equiv 1 \pmod 3$. Siccome $N \leq 2021$ la risposta è 674.

8. La colazione dei campioni! [130]

Troviamo prima di tutto il numero di modi di distribuire le 8 slerfe senza alcuna restrizione. Si tratta di trovare quante sono le quaterne (w, x, y, z) di interi non negativi tali che $w + x + y + z = 8$. Per *Stars and Bars* questi modi sono $\binom{8+4-1}{3} = 165$. Supponiamo ora che ciascuno dei quattro amici riceva almeno una slerfa di focaccia. Allora troviamo tutte le quadruple (w, x, y, z) di interi positivi tali che $w + x + y + z = 8$. Siccome $w, x, y, z \geq 1$ ponendo $x' = x + 1$ si otterrebbe da trovare quante sono le quaterne di interi non negativi (w, x, y, z) tali che $w' + x' + y' + z' = 8 - 4 = 4$, che per *Stars and Bars* sono $\binom{4+4-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$. Togliendo queste quaterne alle quaterne totali, si ha che stiamo contando tutte le quaterne (w, x, y, z) tali che $w + x + y + z = 8$ e almeno uno degli addendi vale 0. La risposta è quindi $165 - 35 = 130$.

9. I 18 anni di Mattysal in ritardo [95]

Se 30 giorni ha Novembre, come April, Giugno e Settembre e tutti gli altri ne hanno 31 (eccetto febbraio, che però non compare tra aprile e luglio), allora i giorni trascorsi dal 17 aprile 2021 al 21 luglio 2021 sono semplicemente:

$$(30 - 17) + 31 + 30 + 21 = 13 + 31 + 30 + 21 = 95$$

La risposta è quindi 95.

10. Kaboom! [76]

Dati 9 punti nel piano, ogni triangolo (anche degenere) sarà dato da un insieme di 3 punti, che può essere scelto in $\binom{9}{3} = 84$ modi possibili. Vanno però esclusi i casi in cui ci sono 3 punti allineati. Abbiamo 3 righe e 3 colonne di punti allineati, più due diagonali di punti allineati. La risposta è quindi $84 - (3 + 3 + 2) = 76$.

11. Piggite o bigetto anche pe doe fermate [5333]

Le tratte da 1 fermata sono 6, le tratte da 2 fermate sono 5, e così via. In generale, le tratte da k fermate sono $7 - k$. Il prezzo medio sarà quindi dato da:

$$\overline{P} = \frac{0,20 \cdot 6 + 0,40 \cdot 5 + 0,60 \cdot 4 + 0,80 \cdot 3 + 1,00 \cdot 2 + 1,20 \cdot 1}{\binom{7}{2}} = 0,5\overline{3} \text{ euro}$$

Che in decimillesimi di euro (esistono?) è proprio $0,5\overline{3} \cdot 10000 = 5333,\overline{3}$, la cui parte intera è 5333. La risposta è quindi 5333.

12. Pasta col sugo di noci flambé! [7875]

Notiamo che affinché (m, n) sia facilmente sottraibile ogni cifra di m deve essere maggiore o uguale ad ogni cifra di n. Studiamo due parti del problema.
Parte 1: Cifra delle migliaia
Chiediamoci: in quanti modi posso scegliere una coppia (a, b) di interi positivi tali che $9 \geq a \geq b \geq 1$?
Se a, b sono distinti avremo allora $\binom{9}{2}$ possibilità, se $a = b$ abbiamo 9 possibilità. Quindi abbiamo $36 + 9 = 45$ possibilità per la cifra delle migliaia di m e di n.
Parte 2: Altre tre cifre
Chiediamoci ora: in quanti modi posso scegliere una coppia (a, b) di interi tali che $9 \geq a \geq b \geq 0$?
Se a, b sono distinti avremo allora $\binom{10}{2} = 45$ possibilità, a cui dobbiamo aggiungere 10 possibilità perché $a = b$, in alcuni casi. Quindi abbiamo 55 possibili scelte per ogni altra coppia di cifre.
In definitiva le coppie facilmente sottraibili sono $45 \cdot 55 \cdot 55 \cdot 55 = 7486875$, tuttavia dobbiamo sottrarre le coppie in cui $m = n$. Sapendo che ci sono 9000 numeri di 4 cifre, ad ognuno di questi, corrisponde una coppia (che abbiamo contato, ma non va bene). La risposta è quindi 7875.

13. Ancora Genova... mi saltano i Nervi [300]

Mattysal fa un giro della passeggiata in $300/2 = 150$ secondi, mentre Badda fa un giro della passeggiata in $300/3 = 100$ secondi. Siccome $\text{mcm}(100, 150) = 300$ vuol dire che Badda e Mattysal si incontreranno tra 300 secondi, a quel punto Mattysal avrà fatto 2 giri, mentre Badda ne avrà fatti 3. La risposta è quindi 300.

14. Il cartello giallo di Sant'Ilario [5989]

In generale possiamo dire che $\dfrac{1}{n(n+3)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+3}\right)$. La somma richiesta diventa così:

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{17} - \frac{1}{20}\right)$$

Notando che molti termini vanno via (salvo alcuni) si ricava che la somma è data da:

$$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) = \frac{5729}{10260}$$

La risposta è quindi 5989.

15. Maniman che ciêuve! [6375]

Siccome P è a coefficienti interi, deve rispettare $a - b | P(a) - P(b)$ per tutti gli interi a, b interi distinti. Scegliendo $a = P(n)$ e $b = 0$ si ha che $P(a) | P(P(a)) - P(0)$, dunque siccome si deve avere per ipotesi che $P(n) | P(P(n))$ per ogni n, è necessario che $P(n) | P(0)$ per ogni infiniti n (tutti i non zeri del polinomio), da cui si ottiene che la condizione richiesta è equivalente a $P(0) = 0$, cioè ad avere il termine noto nullo. Rimangono dunque da scegliere liberamente gli altri 3 coefficienti, che possono variare da 1 a 10 liberamente. La somma dei prodotti è quindi uguale a $(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 9 + 10)^3 = 55^3 = 166375$.
La risposta è quindi 6375.

16. Le piadine le fanno gli gnomi! [84]

Sia $n = \overline{abc}$. Deve accadere che $a + b + c \leq 7$ e $a \geq 1$. Sostituiamo $a' + 1 = a$, allora abbiamo da contare tutte le quaterne (a', b, c', x) di interi non negativi tali che $a' + b + c' + x = 6$, che sono, per *Stars and Bars* esattamente $\binom{6+4-1}{3} = 84$.
La risposta è quindi 84.

17. Cinque Terre, arriviamo! [9]

Si tratta di risolvere $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 7$, che scomposto diventa $(p + q + r)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp) = 7$, abbiamo quindi due casi.
Caso 1: $p + q + r = 7$ e $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp = 1$
La scrittura $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp = 1$ è equivalente a $(p - q)^2 + (q - r)^2 + (r - p)^2 = 2$, ottenuta moltiplicando ambo i

membri per 2. 2 può essere espresso come somma di quadrati interi solo in un modo: $0, \pm 1, \pm 1$, ma la somma delle differenze deve essere $p - q + q - r + r - p = 0$.
Con un po' di pazienza, ponendo $p - q = 1, q - r = -1, r - p = 0$ e scambiando $1, -1, 0$ in tutti i possibili modi, si ottiene la soluzione $(3, 2, 2)$ (scartando eventuali soluzioni non intere) e le sue permutazioni.
Caso 2: $p + q + r = 1$ e $p^2 + q^2 - r^2 - pq - qr - rp = 7$
Allora avremo $(p - q)^2 + (q - r)^2 + (q - r)^2 = 14$, ma 14 può essere scritto come somma di quadrati interi solo in un modo: $\pm 3, \pm 2, \pm 1$, ancora una volta la somma delle differenze deve essere 0.
Ponendo $p - q = 3, q - r = -2, r - p = -1$ (o eventualmente $-3, 2, 1$) e scambiando i valori in tutti i modi possibili scartando eventuali soluzioni non intere, si ottiene la soluzione $(2, -1, 0)$ e permutazioni.
Porre $p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp = -1$ oppure -7 vorrebbe dire avere una somma di tre quadrati interi pari a -2 o -14, ma essendo i quadrati sempre non negativi, questo è un assurdo, quindi ci sono solo due casi. La risposta è quindi $\frac{3!}{2!} + 3! = 3 + 6 = 9$.

18. A Vernazza! [130]

Sia l il lato della base della piramide e h la sua altezza. È noto che 1 litro è pari a 1000 centimetri cubi, dunque dobbiamo vedere le coppie di interi positivi (l, h) tali che $\frac{l^2 h}{3} = 1000$, ossia $l^2 h = 3000$. Scomponiamo $3000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$, da cui ricaviamo che i quadrati che dividono 3000 sono 4, ossia $1, 4, 25, 100$. La risposta è quindi $1 + 4 + 25 + 100 = 130$.

19. Plop plop plop plop [48]

Siccome $p(0) \neq 0$ possiamo constatare che il polinomio non ha radici nulle. Sia a una radice di $p(x)$. Allora $a^7 + 8a - 2 = 0$, da cui $a^6 + 8 - \frac{2}{a} = 0$. In definitiva $\frac{2}{a} - 8 = a^6$ per ogni radice a di $p(x)$. Dunque la somma delle potenze seste sarà data da:

$$\sum_{i=1}^{7} \lambda_i^6 = 2 \left(\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{\lambda} \right) - 8 \cdot 7$$

Per Viète, la somma dei reciproci delle radici di $p(x)$ è data da $\frac{8}{2} = 4$.
La risposta è quindi $2 \cdot 4 - 8 \cdot 7 = 8 - 56 = -48$, il cui valore assoluto è 48.

20. Regionale 12480 [59]

L'osservazione fondamentale è che le rette CM e BN sono le bisettrici rispettivamente degli angoli in C e B, quindi Valentino si trovava nell'incentro di ABC indicato con V. Inoltre CM e BN sono rispettivamente perpendicolari ad AX e AY, quindi il quadrilatero $AMVN$ è ciclico. Inoltre chiaramente MN è parallelo a BC per Talete. Quindi $\widehat{AVM} = \widehat{ANM} = \widehat{AYB} = 59°$. La risposta è quindi 59.