One Hundred Problems - Quinta Edizione

Matteo Salicandro – 30 Aprile 2021

Istruzioni Generali

- È ammesso l'utilizzo di calcolatrici (come quelle tascabili) per l'esecuzione delle quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici grafiche o scientifiche. Non è ammesso l'utilizzo di programmi per la risoluzione dei problemi, né strumenti di calcolo come WolframAlpha, né app per il disegno geometrico come Geogebra. In particolare, **è proibito parlare con altri concorrenti durante la gara relativamente ad essa**.
- Per ogni problema, indicare nella propria area riservata sul problema interessato un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se un problema ha due o più soluzioni, o la risposta vale infinito, si indichi 9999.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre (se non diversamente indicato).**

Scadenze Importanti

- **1440 minuti (24 ore) dall'inizio:** termine per la scelta del Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **1440 minuti (24 ore) dall'inizio:** scadenza del tempo per chiedere i chiarimenti sul testo.
- **4320 minuti (72 ore) dall'inizio:** termine della gara.

In caso di problemi

- Nel caso in cui non dovessi riuscire ad inserire le risposte sul tuo pannello, invia una mail (entro la fine della gara e con lo stesso indirizzo usato per la registrazione) a onehundredproblemsgara@gmail.com specificando il problema e la risposta, verrà inserita nel database come se fosse stata inserita nell'ora in cui è arrivata l'e-mail e la classifica verrà ricalcolata con tale variazione.
- Per chiarimenti sul testo, è preferibile fare uso della funzione "Domande sul testo" che trovate nel vostro pannello.

I premi offerti da Scienza Express

- Verranno premiati **i primi 5 classificati della categoria Senior**; il primo classificato, il secondo, il terzo, il quarto e il quinto riceveranno rispettivamente 3 volumi, 3 volumi, 2 volumi, 2 volumi, 1 volume della collana UMath, a scelta del vincitore.
- Verranno premiati **i primi 3 classificati della categoria Junior**; il primo classificato, il secondo e il terzo riceveranno rispettivamente 3 volumi, 2 volumi 1 volume della collana UMath, a scelta del vincitore.
- Verranno premiati **i primi 2 concorrenti con il valore del jolly più alto** (1 volume), che non ha già vinto uno dei premi esposti nei due punti precedenti.
- Verrà premiato **1 concorrente estratto a sorte della categoria Senior** (1 volume) con una probabilità di vincita proporzionale al punteggio ottenuto in gara;
- Verrà premiato **1 concorrente estratto a sorte della categoria Junior** (1 volume) con una probabilità di vincita proporzionale al punteggio ottenuto in gara.

Grazie a:

- Francesco De Benedittis, Valerio Stancanelli, Gabriel Videtta (per aver contribuito al potenziamento della sostenibilità del sistema, ringraziamo in particolare Francesco per avere creato l'app della One Hundred Problems);
- Matteo Damiano, Tommaso Dossi, Massimiliano Foschi, Matteo Gori (per aver contribuito a testare alcuni dei problemi).

Dulcis in fundo...

- In bocca al lupo a tutti e date il meglio di voi, ma soprattutto, divertitevi!

Mattysal

1. Per cominciare
Marco sceglie un intero $1 < M \leq 10000$ e scrive su una lavagna i numeri **interi** $M^{\frac{1}{1}}, M^{\frac{1}{2}}, ..., M^{\frac{1}{a}}$. Quanto vale a al massimo?

2. Il compleanno di Mattysal
Mattysal ha compiuto di recente 18 anni e la sua torta era un triangolo. I tagli sono piuttosto bizzarri: sono delle rette interne alla torta che la dividono in fette avente come forma dei poligoni. Ilaria, amante dei pentagoni, vuole necessariamente una fetta di torta che abbia come forma un pentagono. Quanti tagli deve fare Mattysal come minimo per rendere contenta Ilaria?

3. Univocamente determinato
Siano a, b interi positivi tali che $2a + b = 4$. Quante sono le coppie di interi positivi $1 \leq c, d \leq 50$ tali che la quantità $ca + db$ sia univocamente determinata?

4. Reali positivi
Siano x, y reali positivi tali che $x + 2021y = 380$. Sapendo che la quantità $x + y$ è intera, quanto vale come minimo $2021x + y$?

5. Il treno per Cesenatico
Il treno Milano-Cesenatico viaggia a velocità costante, parte alle ore 8:00 e giunge alle ore 13:30. A causa di un guasto, oggi il treno viaggia a velocità dimezzata. A che ora arriverà, supponendo che parta sempre alla stessa ora?
Si risponda in formato hhmm. Ad esempio, se si ritiene che la risposta sia 13:24 si dia come risposta 1324.

6. Stai calmo Mattysal!
"Stai Calmo, Mattysal!" gli fu detto durante l'attesa per i risultati della gara distrettuale. Mattysal, in tutta risposta, ha definito la funzione $SCM(a, b)$ dove SCM sta per secondo comune multiplo, cioè il più piccolo intero positivo $K > mcm(a, b)$ tale che $a \mid K$ e $b \mid K$. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b) con $a \geq b$ tali che $SCM(a, b) = 26$? Per ciascuna coppia si calcoli il valore di $a + b$ e si risponda con la somma di tutti i valori.

7. Eliminazione
Lorenzo ha scritto su una lavagna tutte le coppie (a, b) di interi positivi con $1 \leq a < b \leq 10$. Poi cancella ciascuna coppia di numeri e la sostituisce con $MCD(a!, b!)$. Alla fine di queste operazioni qual è la somma dei numeri scritti sulla lavagna?

8. Discussione
Alfa e Beto discutono di un polinomio monico di secondo grado $p(x)$. Hanno scoperto dell'esistenza di due numeri reali distinti α, β che verificano le uguaglianze:

$$p(\alpha + \beta) = p(\alpha) + p(\beta) = p(\alpha) = p(\beta)$$

Se $p(2021) = 2021$, quanto vale $\alpha + \beta$?

9. Eterno
Un intero positivo m si dice *eterno* se e solo se esistono infinite coppie di numeri interi i, j tali che $\lfloor 2^i + 2^j \rfloor = m$. Dire quanti sono gli interi positivi $0 < m \leq 10000$ che sono eterni.

10. Mago Gelato
Mago Gelato possiede un triangolo rettangolo T dove uno degli angoli acuti vale $60°$ e ha un potere magico: ruotando un triangolo rettangolo attorno ad un cateto riesce a produrre un cono che riempirà completamente con del gelato. Mago Gelato ruota prima T attorno al cateto maggiore e poi ruota T attorno al cateto minore, per poi riempire completamente i due coni ottenuti con del gelato. Qual è il rapporto R tra la quantità di gelato inserita nel primo cono e quella nel secondo cono? Dare come risposta $1000R^2$.

11. Incontro genovese
Mattysal incontra finalmente Valentino a Genova ed egli ne è molto entusiasta, infatti Mattysal gli aveva promesso una birra. L'entusiasmo viene rotto però quando Valentino propone a Mattysal un problema di Teoria dei Numeri. Valentino si rivolge a Mattysal dicendo: "Salica', quante sono le terne ordinate di interi positivi (a, b, c) tali che $2^a + 2^b = c^2$ con $1 \leq a, b, c \leq 10$?" Mattysal torna a casa, rifiutandosi di risolvere il problema... ma chiede a voi di trovare la risposta.

12. DAD o Presenza?
In una scuola ci sono 30 classi. In base alle normative vigenti, ogni classe frequenta 4 giorni in presenza e 2 giorni in DAD, ogni settimana. Determinare quante sono le coppie ordinate (A, B) di classi che verificano la proprietà seguente: esiste almeno un giorno della settimana in cui sia A che B frequentano in presenza.

13. A caccia di terne
Quante sono le terne di interi positivi (a, b, c) con $1 \leq a, b, c \leq 80$ tali che $a^{10} + b^{10} + c^{10}$ sia un multiplo di 11?

14. Quando arriva Babbo Natale?
Nella casa di Babbo Natale, gli elfi lavorano costantemente per prepararsi al prossimo Natale, così da organizzarsi in una maniera super efficiente. Hanno disposto mn pacchi regalo in una tabella $m \times n$ dove m, n sono interi positivi minori o uguali a 100. Un elfo fa il seguente gioco: seleziona tre pacchi regalo consecutivi e, se uno di essi è vuoto lo riempie con un giocattolo, diversamente lo svuota. All'inizio tutti i pacchi regalo sono vuoti, e l'obiettivo dell'elfo è riempire tutti i pacchi con un numero finito di mosse. Quante sono le coppie ordinate (m, n) per le quali è possibile fare ciò?

15. Divisibilità esponenziale
Per quante coppie $1 \leq a, b \leq 10$ di interi positivi si ha che 10 è un divisore di $a^{a+1} - b^{b+1}$?

16. Trentasei numeri
Francesca considera tutte le 36-uple di interi non negativi $(x_1, x_2, \ldots, x_{36})$ tali che $x_1 + x_2 + \cdots + x_{36} = 38$. Per ciascuna 36-upla calcola poi il prodotto $x_1 x_2 \ldots x_{36}$. Quanto vale la somma di tutti questi prodotti?

17. Pila di quadrati
Sia $ABCD$ un quadrato. Prendiamo un punto P sulla retta AD in modo che A, D, P siano allineati in quest'ordine e $AD > DP$. Sia Q il punto interno al lato DC tale che $DP = DQ$ e sia R il punto tale che $DPRQ$ sia un quadrato. Sapendo che $CR = 3$ e $BP = 12$, quanto vale la somma delle aree dei quadrati $ABCD$ e $PDQR$?

18. Potenze grandi
Determinare il massimo intero $n \leq 9999$ tale che $n^{2020} + n^{2021}$ sia un quadrato perfetto.

19. Sì, lo voglio!
Alberto e Barbara si sono sposati. E allo scambio dell'anello, Alberto esclama: "Su questo anello è disegnato un poligono di $n > 3$ lati che ha tutte le diagonali congruenti!" Quanti erano i diversi valori che può assumere n? Dare come risposta la loro somma.

20. Il matrimonio di Alberto e Barbara
Al matrimonio di Alberto e Barbara partecipano 20 persone, suddivise in 4 tavoli da 3 persone e 2 tavoli da 4 persone. Ad un certo punto, da ogni tavolo si alza un certo numero di persone (che può essere anche diverso di tavolo in tavolo, anche nullo) per andare a ballare in pista, purché da ogni tavolo si alzi non più della metà delle persone, altrimenti i camerieri mangeranno il loro cibo di nascosto. In quanti modi può essere scelto il gruppo di persone che andrà a ballare?

21. Solo pari
Quante sono le cifre pari all'interno del numero $N = 1000100110021003\ldots201920202021$?

22. Divisori
Quanti sono gli interi positivi $n \leq 2021$ tali che $n + D(n)$ sia un numero pari, dato $D(n)$ il numero di divisori interi positivi di n?

23. Testo breve
Quanto vale la media aritmetica di tutti i numeri palindromi di 4 cifre?

24. Rapporti tra angoli
Nel rettangolo $ABCD$ si ha che $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 2 : 1$. Sapendo che $AB = 10$, trovare il quadrato dell'area del rettangolo.

25. Circuiti elettrici
Un elettricista possiede 2021 lampadine $L_1, L_2, \ldots, L_{2021}$, all'inizio tutte spente. Ciascuna lampadina L_i è collegata ad un interruttore I_i che premuto cambia lo stato della lampadina L_i. All'inizio tutte le lampadine sono spente. Per un periodo di 2021 giorni, al giorno i si premono tutti gli interruttori che somo numerati con un multiplo di i. Quante sono le lampadine accese alla fine di questo lungo periodo?

26. Tante volte dieci
Quanto vale la somma di tutti gli interi positivi n che hanno esattamente 10 divisori interi positivi e sono divisibili per 10?

27. Solo pari
Per quanti interi positivi $m \leq 2021$ accade che la frazione $\dfrac{2021n}{n+m}$ è intera per un numero pari di valori interi di n?

28. Cavallette giocherellone
Le due cavallette Caval e Letta giocano al seguente gioco. Si trovano su un tabellone 1×2021, Caval si trova sulla casella 1 mentre Letta si trova sulla casella 2021. Caval sceglie un intero positivo $k \leq 2020$. Dopo di che loro fanno, contemporaneamente, una sequenza infinita di salti di lunghezza k lungo il tabellone, avanti o indietro. Per quanti interi positivi k Caval e Letta non potranno mai incontrarsi, indipendentemente dall'ordine dei salti?

29. Processore esploso
Un computer è esploso mentre calcolava il massimo comun divisore di tutti gli interi positivi della forma $a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)$ con $10 \leq a, b \leq 100$. Quale sarebbe stato il numero calcolato dal computer, sapendo che a, b sono interi positivi?

30. Centro vertice, raggio lato
Il triangolo PQR ha l'angolo retto in Q, inoltre verifica $PQ = 10, QR = 24$. Consideriamo la circonferenza ω_P di centro P avente raggio PQ e la circonferenza ω_R di centro R avente raggio RQ. ω_P e ω_Q intersecano l'ipotenusa in due punti distinti M, N. Detto r il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo MNQ, trovare r^2.

31. Parole cartesiane
Sia n un intero positivo. Una parola si dice *cartesiana* se è composta da n lettere **X** e n lettere **Y** in modo che i blocchi contenenti solo **X** consecutive e solo **Y** consecutive abbiano lunghezza pari. Ad esempio la parola **XXYY** è cartesiana ma **XYXY** non lo è. Esiste una parola di m lettere appartenenti all'alfabeto $\{X, Y\}$ che possiede almeno 2021 anagrammi cartesiani. Quanto vale m come minimo?

32. Il maggior divisore dispari
Per ogni intero positivo a, chiamiamo $f(a)$ il più grande divisore dispari di a. Per esempio $f(14) = 7$, poiché i divisori di 14 sono $1, 2, 7, 14$. Si determini quanto vale $\log_2(\frac{1}{f(1)}) + \log_2(\frac{2}{f(2)}) + \log_2(\frac{3}{f(3)}) + \cdots + \log_2(\frac{2021}{f(2021)})$.

33. Essere e non poter non essere
Consideriamo le seguenti frasi:

- $m \star$ multiplo di 2;
- $m \star$ multiplo di 3;
- $m \star$ multiplo di 4;
- $m \star$ multiplo di 5;
- $m \star$ multiplo di 6;
- $m \star$ multiplo di 7.

In ogni frase, al posto di ogni stellina va sostituito il verbo "è" oppure il verbo "non è" affinché esista un intero positivo m che renda vere tutte le frasi. In quanti modi si può fare?

34. I grissini
Sono dati due grissini G_1, G_2. Supponiamo che G_1 abbia lunghezza 8 e che G_2 abbia lunghezza 14. Luigi vuole costruire un triangolo avente area $24\sqrt{5}$ e come lati entrambi i grissini, sia G_1 che G_2. Per fare ciò ha bisogno di un altro grissino G_3. Qual è la somma di tutte le possibili lunghezze che può assumere G_3?

35. Al negozio di dolciumi
Un negoziante vende caramelle di 7 tipi diversi: alla fragola, al limone, alla ciliegia, all'arancia, alla liquirizia, all'uva, o all'amarena. Il negoziante sa che per un certo intero positivo $k \leq 1000$, esattamente k caramelle non sono alla fragola, k non sono al limone, k non sono alla ciliegia, k non sono all'arancia, k non sono alla liquirizia, k non sono all'uva, k non sono all'amarena. Quanti sono i possibili valori che può assumere il numero di caramelle in vendita?

36. Al supermercato
Aldo e Gino fanno la spesa presso il loro supermercato di fiducia: *"Prendi due, paghi tre"*, dove vi sono due casse C_1, C_2. Aldo e Gino, amici da una vita dichiarano entrambi: "Alla cassa C_1 sono in fila 2 persone, mentre alla cassa C_2 sono in fila 3 persone. Non amo perdere tempo e scelgo ogni volta la cassa dove pagare casualmente, e infatti la probabilità che io scelga una certa cassa è inversamente proporzionale al numero di persone che attende in quella cassa." Gino aggiunge: "Vai prima tu, Aldo! Io mi regolo sulla base di ciò che fai tu, senza violare le mie regole". Qual è la probabilità percentuale che Gino decida di pagare alla cassa C_2?

37. Prodotto un po' grande
Quanti interi positivi di 4 cifre sono tali che il prodotto delle loro cifre sia maggiore di 1?

38. Giallo o rosso
A causa di una malattia che si diffonde nello stato di Matelandia, composto da 16 regioni, è necessario in ogni regione imporre delle restrizioni in funzione della criticità della situazione. Lo stato di Matelandia è rappresentato da una griglia quadrata 4×4 dove ogni quadratino è una regione. Il governatore colora ogni quadratino di giallo o di rosso facendo in modo che la mappa delle restrizioni sia sempre identica se la si ruota di $90° \cdot k$ con k intero. In quanti modi il governatore può imporre restrizioni?

39. Confettilandia
A Confettilandia vivono due tipi di persone: i furfanti (che mentono sempre) e i cavalieri (che dicono sempre la verità). Preso un certo campione di 80 abitanti di Confettilandia, si ha che 40 di essi sono furfanti e 40 di essi sono cavalieri. Ognuno di loro pronuncia una frase. "Non mi piacciono i confetti" è pronunciata da 20 persone, i restanti dicono "Mi piacciono i confetti". Tra queste 80 persone, quante sono quelle che amano i confetti, al massimo?

40. Somma di quadrati
Sia $P(x)$ un polinomio monico di terzo grado che soddisfa la relazione $P(1) - P(0) = 19$. Si determini quanto può valere come minimo l'espressione $a^2 + b^2 + c^2$ dove a, b, c sono le radici di $P(x)$. Se il risultato è negativo, si dia come risposta il valore assoluto.

41. Sottoinsiemi pitagorici

Consideriamo l'insieme A formato da tutti i punti a coordinate intere non negative (x, y) tali che $0 \leq x, y \leq 5$. Un sottoinsieme $S \subseteq A$ si dice *pitagorico* se S contiene esattamente tre punti e questi tre punti formano un triangolo rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani. Quanti sono gli insiemi pitagorici?

42. Le disuguaglianze, quelle belle

Per ogni intero positivo n chiamiamo D_n il numero di divisori interi positivi di n. Ad esempio $D_{2021} = 4$ in quanto i divisori di 2021 sono $1, 43, 47, 2021$. Quanti sono gli interi positivi $1 \leq n \leq 9999$ tali che $D_n + D_{n+1} + D_{n+2} < 10$ sapendo che tra 1 e 9999 ci sono esattamente 1229 numeri primi?

43. Divisibile

Per quante coppie ordinate di interi positivi $1 \leq m, n \leq 20$ il polinomio $p(x) = x^m + x^n$ è divisibile per $x^2 + 1$?

44. Kaboom!

Alla colonia Agip di Cesenatico c'è un parcheggio dove sostano, uno dietro l'altro, ma orientati a caso (verso destra o sinistra), 8 autobus. Tuttavia, ad un certo punto, accendono i motori contemporaneamente e vanno dritto; ma ecco che... kaboom! Due degli autobus si scontrano in quanto viaggiavano in direzioni opposte. Qual era la probabilità che ciò accadesse, supponendo tutte le disposizioni possibili degli autobus? Dai come risposta somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

45. Di che colore sono i numeri?

Chiamiamo $[n]$ l'insieme degli interi da 1 a n. Esiste un intero positivo K con la seguente proprietà: per ogni $M \geq K$, gli elementi di $[M]$ sono colorati o di rosso o di blu, e al variare di tutte e 2^M le colorazioni possibili, esiste sempre una quaterna di elementi (a_1, a_2, a_3, a_4) (non necessariamente distinti) di $[M]$ che verificano $a_1 + a_2 + a_3 = a_4$ e a_1, a_2, a_3, a_4 hanno tutti lo stesso colore. Quanto vale K?

46. Il massimo del massimo comun divisore

Due interi positivi m, n sono tali che $mn = 324$. Qual è la somma di tutti i valori possibili che può assumere $MCD(m^2, n^2)$?

47. Musica sia!

La band dei matematici ha nel proprio repertorio 8 canzoni distinte, 3 delle quali sono molto lunghe. La band deve suonare tutte e 8 le canzoni, facendo in modo che non vengano suonate due canzoni lunghe di fila, onde evitare che il pubblico si annoi. In quanti modi si può fare ciò?

48. Differenza di segmenti

Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza Γ e verifica $AC = 28, BC = 62$. Sia γ la circonferenza tangente al lato AB nel punto D, tangente inoltre internamente alla circonferenza Γ nel punto C. Supponiamo che valga $BD - DA = 20$. Trovare AB.

49. Il mastro cioccolatiere

Un mastro cioccolatiere vuole produrre una tavoletta di cioccolato composta da 12 quadratini disposti su una griglia 2×6. Ogni quadratino può essere al latte, oppure fondente. Egli realizza tale tavoletta facendo in modo che, partendo da sinistra, ogni sotto-tabella composta da due righe e le prime k colonne per $1 \leq k \leq 6$ contenga un numero di quadratini al latte maggiore o uguale al numero di quadratini fondenti. In quanti modi il mastro cioccolatiere può realizzare la tavola, se vuole che essa contenga esattamente 6 quadratini al latte e 6 quadratini fondenti?

50. Per tre o per quattro

Trovare il numero di sestuple $1 \leq a, b, c, d, e, f \leq 4$ tali che $(3a + 4b + 3c)(4d + 3e + 4f)$ sia un numero pari.

51. Frazione intera

Siano $1 \leq a, b \leq 2021$ interi positivi. Quante sono le coppie ordinate (a, b) tali che $\dfrac{a^2 - ab - 2}{ab + 1}$ sia un numero intero?

52. Razzo pazzo

Un razzo pazzo viaggia in una galassia che comprende 8 pianeti, disposti in fila chiamati $P_0, P_1, P_2, ..., P_7$. Beta il Marziano conduce il razzo, e parte dal pianeta P_0; e si sposta di pianeta in pianeta in base all'esito del seguente gioco. Nel momento in cui si trova sul pianeta P_j, lancia una moneta equilibrata. Se esce testa, si muove sul pianeta $P_{2j \pmod 8}$, diversamente se esce croce si muove sul pianeta $P_{2j+1 \pmod 8}$. Qual è la probabilità che dopo 13 lanci Beta si trovi sul pianeta P_3? Dare come risposta somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

53. Curvilinei

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 48, circoscritto ad una circonferenza di centro O. Chiamiamo E il punto medio del segmento AD, F il punto medio del segmento AB e T l'intersezione tra EF e AC. Infine, chiamiamo P l'intersezione più vicina ad A che a C della retta AC con la circonferenza inscritta nel quadrato. Qual è la somma delle aree dei due triangoli curvilinei EPT e AFP?

54. Due poligoni insieme

Sia AB un segmento e sia M il punto medio di AB. Costruiamo il triangolo equilatero MCA e il pentagono regolare $MBDEF$, in modo che i due poligoni si trovino dalla stessa parte rispetto a r e i vertici siano ordinati in senso antiorario. Trovare l'ampiezza in gradi dell'angolo ottuso formato dalle rette BC e AF.

55. Trisezione
Sia $ABCD$ un rettangolo che soddisfa l'uguaglianza $AB : BC = 2 : 1$. Chiamiamo P, Q due punti sul lato AB presi in modo tale che $\widehat{ADP} = \widehat{PDQ} = \widehat{QDC}$. Detto R il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area di DPQ quanto vale $100R^2$?

56. Tre dadini
Giada possiede tre dadi dodecaedrici (vale a dire: con dodici facce) identici, ciascuno ha le facce numerate da 1 a 12. Qual è la probabilità p che lanciando tutti e tre i dadi contemporaneamente, i numeri usciti siano tutti distinti? Dare come risposta $\lfloor 10000p \rfloor$.

57. Numero pazzesco
Quante sono le quintuple ordinate di interi positivi (A, B, C, D, E) tali che $A! + B! + C! + D! = 2^E$?

58. Vola vola l'aquilone
Il quadrilatero $ABCD$ ha le seguenti proprietà: $AC \perp BD$, $AC \cdot BD = AB \cdot CD$, $\widehat{BAC} = 32°$ e $\widehat{BDC} = 86°$. La bisettrice dell'angolo $\widehat{DBA}$ interseca il lato BD nel punto T. Qual è l'ampiezza di $\widehat{BTC}$?

59. Bisogna saper perdere
Annalucia e Beatrice giocano con un dado ottaedrico a 8 facce numerate da 1 a 8. Il dado viene lanciato, se esce un numero pari vince Annalucia. Se esce un numero dispari, invece, Annalucia si arrabbia così tanto che non ci vede più dalla rabbia: infatti chiude gli occhi e sostituisce una faccia casuale del dado con un numero pari. Se, dopo aver eseguito questa operazione, esce ancora un numero dispari, Annalucia si rassegna e perde. Qual è la probabilità percentuale che Annalucia ha di vincere?

60. Sette addendi
Trova la somma di tutti gli interi positivi $n = \overline{abc}$ con $100 \leq n \leq 999$ e a, b, c cifre decimali di n tali che:

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = \overline{abc}$$

61. Caccia alle uova
Alice, Barbara e Cecilia si stanno sfidando ad una caccia alle uova pasquali. Sono nascoste 69 uova all'interno di un giardino. Sapendo che Alice trova più uova di Barbara che a sua volta trova più uova di Cecilia che a sua volta trova almeno un uovo, in quanti modi diversi può essere finita la caccia alle uova, dal punto di vista delle uova raccolte da ciascuna ragazza?

62. Il poligono di Giulio
Su un enorme foglio di carta, Giulio ha disegnato un poligono convesso di 2021 lati. Quanti assi deve tracciare come minimo per essere certo di sapere se è ciclico o meno?

63. Potenze quarte sopra, potenze di due sotto
Si determini il valore della seguente somma infinita: $\dfrac{1^4}{2^1} + \dfrac{2^4}{2^2} + \dfrac{3^4}{2^3} + \ldots$

64. Gioca e perdi
Al casinò "Gioca e perdi" si può giocare a "Testa o croce". Scommetti una certa somma di denaro e si lancia una moneta, se esce testa la vinci e ti viene restituita; diversamente la perdi. Di recente, sono stati scoperti degli imbrogli, il gioco viene eseguito con delle monete false. La polizia ha scoperto, negli scantinati del locale, un sacchetto pieno di 2021 monete $M_1, M_2, \ldots, M_{2021}$ tali che la moneta M_i, se lanciata, esca testa con una probabilità pari a $\frac{1}{i+1}$. La polizia lancia tutte le monete, e sorprendentemente, escono tutte croci. Qual era la probabilità che ciò accadesse? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

65. Radicali al denominatore
Trovare il valore della somma: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2020^2} + \sqrt[3]{2020 \cdot 2021} + \sqrt[3]{2021^2}}$.

66. Quadri elettrici
Lorenzo l'elettricista possiede 8 lampadine RGB: ogni lampadina può essere rossa, verde o blu. Dispone le 8 lampadine in fila su un tavolo girate a caso e sfida Paride al seguente gioco: ad ogni turno, considerato sceglie una lampadina e si spegne il massimo numero possibile di lampadine consecutive che hanno lo stesso colore di quella selezionata in principio. Vince chi spegne l'ultima lampadina, inizia Lorenzo. Al variare di tutte e 3^8 le configurazioni possibili delle lampadine, quante sono le configurazioni possibili delle lampadine in modo che Paride abbia una strategia vincente?

67. Due tangenti
Consideriamo un rettangolo $ABCD$ in cui $AB = CD = 96$ e $BC = DA = 40$. Sia ω la circonferenza interna ad $ABCD$, tangente ai lati AB, CD nei loro punti medi. Chiamiamo r la retta tangente a ω passante per D che non contiene il lato CD e s la retta tangente a ω passante per C che non contiene il lato CD. Si ha che le rette r, s intersecano AB nei punti E, F rispettivamente. Si determini l'area del quadrilatero $CDEF$.

68. Diagonale, riga e colonna
Sia N il numero di modi in cui è possibile riempire una tabella 2021×2021 con dei numeri interi da 0 a 5 in modo tale che:

- La somma dei valori di ogni riga sia multipla di 2;
- La somma dei valori di ogni colonna sia multipla di 3;
- La somma dei valori di ognuna delle due diagonali maggiori sia multipla di 6.

Qual è l'esponente della più grande potenza di 6 che divide N?

69. Viva il vino
Un sommelier possiede quattro calici di vino, che contengono rispettivamente $100, 200, 400, 800$ mL di vino. A ogni mossa può scegliere due calici e distribuire in maniera equa il vino in essi contenuto. Ad esempio, se sceglie il calice da 400 mL e il calice da 800 mL, egli sistemerà i due calici in modo tale che essi contengano entrambi 600 mL di vino. Il sommelier, ubriaco, non fa caso a quali calici prende ad ogni mossa, ma qual è la probabilità che dopo 4 mosse tutti i calici contengano la stessa quantità di vino? Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

70. Equazione interessante
Quante sono le coppie ordinate di interi positivi (m, n) tali che $1 \leq m \leq n \leq 2021$ e $[MCD(m, n)]^6 = mcm(m, n)$?

71. Interna ed esterna
Sia ABC un triangolo con $AB = 13, BC = 14, CA = 15$. Siano D, E i punti di intersezione rispettivamente tra la bisettrice interna, la bisettrice esterna dell'angolo $\widehat{BAC}$ e il lato e la retta BC. La circonferenza circoscritta al triangolo ADE interseca la retta AC nel punto $F \neq A$. Calcolare BF. Dare come risposta la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

72. Coppie ordinate
Quante sono le coppie ordinate di interi positivi (a, b) tali che $MCD(a, b) + mcm(a, b) = a + b$ e $a - b = 18$?

73. Angolo ignoto
Sia ABC un triangolo tale che $\widehat{ACB} = 48°$ e $\widehat{ABC} = 42°$. Si prenda il punto P sul lato AB in modo che CP sia bisettrice dell'angolo $\widehat{ACB}$. Detto Q il punto medio di CP, sia R l'intersezione tra AQ e il lato BC. Quanto vale in gradi l'angolo $\widehat{ARB}$?

74. Uno prolunga l'altro
Siano m, n due interi positivi. Diciamo che m è un *prolungamento* di n se, scrivendo m in base 10, le ultime K cifre di m sono, nello stesso ordine, le cifre di n, dove K è il numero di cifre decimali di n. Per esempio, 51837 è un prolungamento di 37 ma 2021 non è un prolungamento di 18. Per quanti $1 \leq n \leq 2021$ interi positivi pari si ha che n^2 è un prolungamento di n? Dare come risposta la loro somma.

75. Raggio già noto
Di un triangolo rettangolo ABC sappiamo che esso verifica $\widehat{BAC} = 90°$. Siano D, E rispettivamente due punti sul lato AC e sul lato BC in modo tale che il quadrilatero $BEDA$ sia ciclico, inscritto in una circonferenza avente raggio $\frac{CD}{2}$. Qual è l'area del triangolo ABE, sapendo che $AB = 60, AC = 144$?

76. Tangenti internamente
Sia ABC un triangolo con $AB = 52, BC = 56, CA = 60$. Detta Γ la circonferenza circoscritta al triangolo ABC, siano M, N rispettivamente i punti medi di AB, AC. Il punto T giace sull'arco minore BC in modo che la circonferenza circoscritta al triangolo MNT sia tangente internamente alla circonferenza Γ. Qual è l'area di MNT?

77. Parallele passanti per dei punti
Sia ABC un triangolo con $BC = 2021$. Detti rispettivamente G, I il baricentro e l'incentro del triangolo ABC si ha che le rette GI e BC sono parallele. Sapendo che i lati di ABC sono tutti interi, trovare quanto può valere al massimo AB.

78. Dentro un cerchio piazza il triangolo
Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza Γ e sia P un punto sull'arco minore BC che soddisfa $BP = 4$. La retta r parallela al segmento CP e passante per B interseca la retta AP nel punto N e si ha che $AN = 9$. Qual è l'area di ABC? Detta S tale area, si dia come risposta S^2.

79. Una certa differenza
Definiamo il polinomio $F(x)$ di grado 4042 come segue:

$$F(x) = (x^2 - x + 2021)(x^2 - 2x + 2021)(x^2 - 3x + 2021)\ldots(x^2 - 2021x + 2021).$$

Chiamiamo R la somma delle radici reali di $F(x)$ e chiamiamo C la somma delle radici complesse (non reali) di $F(x)$. Trovare $|R - C|$.

80. Atletici!
In una gara di atletica gareggiano 4 squadre, ciascuna squadra è composta da 50 persone e ogni persona ha sul pettorale un numero intero positivo tra 1 e 50, i numeri sui pettorali di due persone della stessa squadra sono sempre distinti. Per ogni squadra viene nominato un capitano e si scatta una foto con i capitani di ogni squadra tutti insieme. Se si fa il prodotto di tutti i numeri che compaiono in foto, si ottiene un numero che è multiplo di 4. Qual era la probabilità che ciò accadesse? Dare come risposta somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

81. Somma di aree
Nel piano è dato un insieme di 5 punti distinti allineati in quest'ordine: A, B, C, D, E tali che $AB = BC = 1, CD = 2, DE = 9$. Camillo prende un punto P sullo stesso piano e costruisce i quadrati di aree AP, BP, CP, DP, EP. Quanto vale come minimo la somma delle aree dei quadrati costruiti?

82. Reciproci elevati alla dodicesima
Siano $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_7$ le radici eventualmente complesse del polinomio $q(x) = x^7 - 3x^6 - 1$.
Stabilire il valore della quantità $\frac{1}{\alpha_1^{12}} + \frac{1}{\alpha_2^{12}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_7^{12}}$.

83. Pisa
La Torre di Pisa era, in principio, un cilindro avente una base circolare di raggio 76 e un altezza 57. Col passare degli anni, la Torre si è inclinata, infatti se si considera la retta immaginaria passante per i centri delle due circonferenze (cioè le basi del cilindro), questa retta è stata ruotata di 30 gradi con una rotazione avente come centro il centro della circonferenza su cui poggia il cilindro. Qual è la distanza tra il punto più in alto della Torre Pendente e il piano su cui poggiava la Torre in principio? Dopo avere espresso il risultato nella forma $a + \frac{b}{c}\sqrt{3}$ con a, b, c interi positivi e b, c coprimi, determinare $a + b + c$.

84. Composizione strana
Per ogni intero positivo n siano $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ i suoi k divisori positivi. Chiamiamo inoltre $d(i)$, per ogni intero positivo i il numero di divisori interi positivi di i. Qual è il massimo intero positivo $n < 2021$ per il quale vale l'identità:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} d(d_i)\right)^2 - \sum_{i=1}^{k-1} d(d_i)^3 = 27$$

Se si pensa che tale intero non esista, si dia come risposta 0.

85. Due cubi incollati
Consideriamo due cubi di lato 1 incollati per una faccia: si ottiene, per intenderci, un parallelepipedo $2 \times 1 \times 1$. Sia S l'insieme dei 12 punti dello spazio che comprende i vertici dei cubi iniziali, contando una sola volta eventuali punti ripetuti. Determinare quante sono le terne ordinate di punti distinti $(P, Q, R) \in S$ tali che PQR sia un triangolo rettangolo.

86. Stai composta!
Sia $f(x) = x^2 + 6x + 6$. Definiamo $f^2(x) = f(f(x))$ e in generale $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ per ogni intero positivo k. Consideriamo le soluzioni reali dell'equazione $f^4(x) = 0$ e siano $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ rispettivamente la radice reale massima e la radice reale minima. Qual è il minimo intero positivo e tale che $(\lambda_{max} - \lambda_{min})^e \in \mathbb{Z}$?

87. Duemilaventuno potenze
Diciamo che un intero positivo m è detto *forte* se esiste una successione di interi non negativi $a_1, a_2, ..., a_{2021}$ e un intero $d \geq 0$ tale che $m^d = m^{a_1} + m^{a_2} + m^{a_3} + ... + m^{a_{2021}}$. Dire quanti sono gli interi positivi forti.

88. Il lato mancante
Sia ABC un triangolo in cui $AC = 38$ e $BC = 64$. Sia Ω la circonferenza inscritta nel triangolo ABC avente centro I, tangente ai lati AB, BC, CA nei punti P, Q, R rispettivamente. La circonferenza circoscritta al triangolo IQR interseca le rette AI, BI in M, N rispettivamente, oltre che in I. Trovare quanto vale AB^2 sapendo che $MN = 29$.

89. Un insieme limitato
Sia S l'insieme di tutti gli interi positivi n in cui compare almeno una volta ciascuna delle cifre $3, 4, 5, 6$ (e nessun'altra cifra può comparire in n), tali che la somma delle cifre di n e la somma delle cifre di $2n$ valga 900. Si determini quante cifre ha il prodotto tra il minimo e il massimo elemento di S.

90. Rapporti e cerchi
Sia ABC un triangolo con $AB = 14, BC = 16, CA = 18$ e sia Ω la circonferenza circoscritta ad ABC. Sia P il punto sul lato BC tale che $AB^2 : AC^2 = BP : CP$. Sia D l'intersezione tra Ω e AP. Sia E l'intersezione tra la circonferenza circoscritta a PDC e la retta AC. La retta DE interseca Ω nuovamente in X. Determinare la lunghezza di AX^2.

91. Phi-schiettando
Sia $\phi(n)$ la funzione di Eulero, cioè il numero di interi positivi $\leq n$ che sono coprimi con n. In generale, data una funzione $f(x)$ si definisce $f^k(x)$ la funzione $f(x)$ composta k volte. Per esempio $f^2(x) = f(f(x))$. Per comodità, definiamo $\phi^0(k) = k$. Per dei certi interi positivi m accade che $\phi^i(m)$ è un multiplo di $\phi^{i+1}(m)$ per ogni intero $i \geq 0$. Per quanti interi positivi $m \leq 2021$ accade ciò?

92. Primi al quadrato
Determinare il numero di terne di interi positivi a, b, c con $a < b < c$ tali che $abc = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2$.

93. Raggio minimo
Sia ABC un triangolo con $AB = 68, BC = 30, CA = 70$ e sia Γ la circonferenza di raggio minimo, passante per A tangente a BC. Siano X, Y le seconde intersezioni tra AB, AC e la circonferenza Γ rispettivamente. La semiretta XY interseca la circonferenza circoscritta ad ABC in P. Dopo avere espresso AP nella forma $\frac{a}{b}$ con a, b coprimi determinare $a + b$.

94. Binomiali a gruppi
Data una coppia di interi positivi a, b si definisce $f(a, b)$ la quantità:

$$f(a,b) = \sum_{\sum_{i=1}^{a} x_i \le b} \binom{b}{b-x_1}\binom{b-x_1}{b-x_1-x_2}\binom{b-x_1-x_2}{b-x_1-x_2-x_3}\cdots\binom{b-x_1-x_2-\cdots-x_{a-1}}{b-x_1-x_2-\cdots-x_a}$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_a$ sono interi non negativi. Detto Z il numero di zeri con cui termina la quantità $f(2,2) \cdot f(3,3) \cdot \ldots \cdot f(100,100)$, determinare Z.

95. Tanti punti e tante rette, non si capisce più niente
Sia ABC un triangolo con $AB = 70, BC = 80, CA = 90$, avente circocentro O. Siano D, E, F i punti rispettivamente sul lato BC, CA, AB presi in modo tale che AD, BE, CF siano le bisettrici interne degli angoli in A, B, C rispettivamente. Chiamiamo inoltre L, M, N i punti medi di BC, CA, AB rispettivamente. Definiamo r_L come la retta passante per L e perpendicolare alla retta AD; siano inoltre r_M, r_N rispettivamente la retta per M pependicolare a BE e la retta per N perpendicolare a CF. Siano s_L, s_M, s_N rispettivamente le rette perpendicolari a r_L, r_M, r_N passanti per L, M, N. Definiamo inoltre i seguenti punti: $K_N = r_L \cap r_M, K_L = r_M \cap r_N, K_M = r_L \cap r_N$. Siano invece: $P_L = LO \cap MN, P_M = MO \cap LN, P_N = NO \cap ML$. Sia infine T_L il punto sulla retta $P_L K_L$ tale che la perpendicolare a BC passante per T_L, s_N, s_M siano concorrenti; sia T_M il punto sulla retta $P_M K_M$ tale che la perpendicolare ad AC passante per T_M, s_N, s_L siano concorrenti; sia infine T_N il punto sulla retta $P_N K_N$ tale che la perpendicolare ad AB passante per T_N, s_M, s_L siano concorrenti. Definiamo $d(P, r)$ come la distanza del punto P dalla retta r. Si determini il valore di $(d(T_L, MN) + d(T_M, LN) + d(T_N, LM))^2$.

96. Il chimico malefico
Un chimico malefico entra in un laboratorio dove stanno lavorando 4 gruppi, ciascuno di 3 persone. Ognuna di queste 3 persone ha in mano una beuta contenente acqua distillata, ogni beuta contiene la stessa quantità di acqua. Il chimico malefico si avvicina al primo gruppo e inserisce a_1 gocce di acido solforico nella prima beuta, a_2 gocce nella seconda e a_3 gocce nella terza, in modo che $a_1 + a_2 + a_3 = 4$. Similmente, si avvicina al secondo gruppo e inserisce b_1 gocce nella prima beuta, b_2 gocce nella seconda e b_3 gocce nella terza in modo che $b_1 + b_2 + b_3 = 3$. Nel terzo gruppo esegue la stessa operazione mettendo c_1, c_2, c_3 gocce nelle rispettive beute in modo che $c_1 + c_2 + c_3 = 2$ e nel quarto gruppo, infine, inserisce in ogni beuta d_1, d_2, d_3 gocce in modo che $d_1 + d_2 + d_3 = 1$. Assumendo che la grandezza delle gocce sia sempre la stessa e che il chimico metta le gocce di acido solforico nelle beute in maniera casuale, determinare la probabilità percentuale che la beuta contenente la soluzione più acida di tutte sia una beuta del primo gruppo (in assoluto su tutte le beute, senza pari merito).

97. Scacchi volanti
Nel gioco degli *scacchi volanti*, una torre attacca un'altra torre se e solo se entrambe le torri giacciono sulla stessa riga (o sulla stessa colonna), indipendentemente dalla presenza in mezzo di altri pezzi. All'interno di una scacchiera 8×8 sono state piazzate 16 torri (ciascuna casella non può essere occupata da più di una torre) in modo che ogni torre attacchi esattamente due torri. In quanti modi si poteva fare ciò?

98. Insieme di punti
Considerato su un piano il triangolo ABC il quale verifica $AB = 26, BC = 28, CA = 30$, sia S il luogo dei punti di tale piano tale che per ogni punto $P \in S$ si abbiano le uguaglianze:

$$PA^2 + PB^2 + AB^2 = PB^2 + PC^2 + BC^2 = PC^2 + PA^2 + CA^2$$

Per ogni punto $P \in S$ si calcoli l'area del triangolo BPC. Quanto vale la somma di tutte queste aree?

99. Diofantea stretta
Jack considera l'equazione diofantea:

$$2^{4m^2} + 2^{m^2-n^2+4} = 2^{k+4} + 2^{3m^2+n^2+k}$$

Inoltre egli si chiede quanti sono gli interi positivi dispari $1 \le k \le 100$ tali che l'equazione sopra abbia due e soltanto due soluzioni (m, n) dove m, n sono interi strettamente positivi.

100. Dulcis in fundo

Sia ABC un triangolo tale che $AB = 602, BC = 804, CA = 542$. Sia X un punto sul lato AB tale che $XB = 234$. Sia K il punto sul lato BC in cui la bisettrice interna dell'angolo $\widehat{BAC}$ interseca il lato BC. L'asse del segmento AK interseca la retta BC nel punto L. Sulla retta AL si prenda un punto P tale che $AP = 1204$, in modo che L, P, A siano allineati in quest'ordine. Chiamiamo ω_1 la circonferenza passante per B, X e tangente alla retta PX. Sia Y un punto interno al lato AC, chiamiamo quindi ω_2 la circonferenza passante per C, Y e tangente alla retta PY. Supponiamo che ω_1 e ω_2 si intersechino in due punti, uno dei quali giace sulla retta BC. AY^2 è un numero razionale. Quali sono le sue prime 4 cifre dopo la virgola?

I problemi finiscono qui, spero che tu ti sia divertito!

Alla prof. Maria Antonietta Calò
A Antonio Diviggiano
Al prof. Pierluigi Magli
A Matteo Mazzarelli
Alla prof. Anna Maria Rescio