One Hundred Problems - Sesta Edizione

Matteo Salicandro – 13 Aprile 2022

Istruzioni Generali

- È ammesso l'utilizzo di calcolatrici (come quelle tascabili) per l'esecuzione delle quattro operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Non è ammesso l'utilizzo di calcolatrici grafiche o scientifiche. Non è ammesso l'utilizzo di programmi per la risoluzione dei problemi, né strumenti di calcolo come WolframAlpha, né app per il disegno geometrico come Geogebra. In particolare, **è proibito parlare con altri concorrenti durante la gara relativamente ad essa**.
- Per ogni problema, indicare nella propria area riservata sul problema interessato un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Dovessero tornare utili dei valori approssimati, utilizzare le approssimazioni $\sqrt{2} = 1,41 \quad \sqrt{3} = 1,73 \quad \pi = 3,14$
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se un problema ha due o più soluzioni, o la risposta vale infinito, si indichi 9999.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre (se non diversamente indicato).**

Scadenze Importanti

- **1440 minuti (24 ore) dall'inizio:** termine per la scelta del Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **1440 minuti (24 ore) dall'inizio:** scadenza del tempo per chiedere i chiarimenti sul testo.
- **4320 minuti (72 ore) dall'inizio:** termine della gara.

In caso di problemi

- Nel caso in cui non dovessi riuscire ad inserire le risposte sul tuo pannello, invia una mail (entro la fine della gara e con lo stesso indirizzo usato per la registrazione) a onehundredproblemsgara@gmail.com specificando il problema e la risposta, verrà inserita nel database come se fosse stata inserita nell'ora in cui è arrivata l'e-mail e la classifica verrà ricalcolata con tale variazione.
- Per chiarimenti sul testo, è preferibile fare uso della funzione "Domande sul testo" che trovate nel vostro pannello.

I premi offerti da Scienza Express

- Il numero dei premi (che consiste in un volume della collana **UMath** per vincitore) non è ancora noto e verrà comunicato appena possibile. I premi verranno estratti a sorte: ogni partecipante ha una probabilità di essere estratto direttamente proporzionale al punteggio conseguito in gara. Ad esempio, se Tizio totalizza 200000 punti e Caio ne totalizza 10000, allora Tizio ha 20 volte più possibilità di vincere un premio rispetto a Caio.

Grazie a:

- Chiunque abbia contribuito con delle donazioni a sostenere l'iniziativa, per poter offrire dei premi e potenziare il sistema informatico che, ogni anno, deve sostenere un numero grosso di partecipanti.
- Francesco De Benedittis, Valerio Stancanelli per aver contribuito significativamente nel settore informatico per lo svolgimento dell'evento;
- Valentino Badalucco, Giacomo Calogero, Gabriele Congedo, Matteo Damiano, Tommaso Dossi, Massimiliano Foschi, Leonardo Franchi (per aver contribuito a testare alcuni dei problemi).

Dulcis in fundo...

- In bocca al lupo a tutti e date il meglio di voi, ma soprattutto, divertitevi!

Mattysal

1. Social distancing
Presso un ristorante si trova un gruppo di n persone e la distanza tra due persone qualsiasi del gruppo è sempre di esattamente 1 metro, né di più né di meno. Quante persone ci sono al massimo al ristorante?

2. Riso patate e cozze
C'è chi lo chiama *riso patate e cozze*, chi *riso cozze e patate*... ogni ingrediente in un ordine diverso. Quanti nomi diversi potrebbe avere questo piatto?

3. Dadi
Ci sono n dadi a $k \geq 4$ facce identici, ciascuna faccia è numerata con un numero da 1 a k. Sapendo che la differenza tra il massimo e il minimo numero ottenibile lanciando gli n dadi è 168, quanto vale la somma di tutti i possibili valori per n?

4. Pentis
Federico ha inventato il gioco del *Pentis*. Su una tabella 5×5, due giocatori si sfidano mettendo una croce o un cerchio su una casella, in modo tale da occupare completamente una riga, una colonna, o una delle due diagonali maggiori della tabella con i loro segni. Ora però Federico decide di giocarci da solo: parte da una tabella 5×5 vuota, chiude gli occhi e marca un certo numero di caselle con una croce. Poi apre gli occhi, ma solo quando ha messo abbastanza croci tali da essere sicuro che, in ogni caso, ha fatto Pentis. Quante croci ha messo, come minimo?

5. Powers
Quanti interi positivi k sono tali che 5^k abbia tutte le cifre diverse?

6. Il rettangolo di Giovanni
Giovanni ha disegnato un rettangolo $ABCD$ in cui la base CD è lunga 6. Sulla diagonale AC ha preso un punto P tale che $BP \perp AC$ e un punto Q tale che $DQ \perp AC$. -Caspita, P e Q coincidono!- urla Giovanni. Quanto vale l'area del rettangolo $ABCD$?

7. Fibonacci aggiornato
Una sequenza di numeri interi è tale che il primo termine è uguale a x, il secondo termine è uguale a y, e dal terzo termine in poi, ogni termine è uguale alla somma dei due immediatamente precedenti. Se il quinto termine della sequenza vale 47 e il sesto termine vale 76, quanto vale il terzo termine?

8. Matematici, fisici e ingegneri
Un'isola conta 2022 abitanti. Ogni isolano può essere un matematico (che dice sempre la verità), un fisico (anch'essi dicono sempre la verità) o un ingegnere (che mente sempre). Se ogni isolano pronuncia la frase: -Non sono un matematico-, quanti isolani, al massimo, sono fisici?

9. Alla fiera dell'Est
Se il rapporto tra il doppio del doppio di k e il quadruplo del quadruplo di 2 è un numero intero positivo, quanto vale k come minimo?

10. Donut
Sono date due circonferenze concentriche γ_1 e γ_2 aventi rispettivamente raggio 5 e r. Sapendo che l'area della corona circolare dei cerchi γ_1 e γ_2 vale 16π quanto può valere al massimo la parte intera di r?

11. Sequenza particolare
È data una sequenza di 2021 numeri interi positivi. Sappiamo che presi 2 termini consecutivi della sequenza, la loro somma vale 4. Quanto vale la somma di tutti i termini della sequenza?

12. Il mio amico Loenzo
Il mio amico Lorenzo ha una R così moscia e impronunciabile che non riesce a pronunciare bene nemmeno il suo nome. L'alfabeto italiano è composto da 21 lettere. Quante sono le parole di tre lettere con lettere appartenenti all'alfabeto italiano che Lorenzo non riesce a pronunciare?

13. Il punto sulla semiretta
Nel triangolo ABC si ha che $\widehat{BAC} = 90°$, inoltre $AB = 18, AC = 24$. Sia D il punto su BC tale che $AD \perp BC$ e sia X il punto sulla semiretta AD tale che $\widehat{BXC} = 90°$. Quanto è lungo AX?

14. Polinomio all'esponente
Quanti interi positivi $n \leq 2022$ sono tali che $(3n+2)^{5n+8}$ sia un quadrato perfetto?

15. Quadrati e prodotti a confronto
Quante coppie (a, b) di interi positivi sono tali che $a^2 + b^2 \leq ab + 6$?

16. Rapido e indolore
Dire per quanti interi positivi $n \leq 2022$ accade che $\left\lfloor \frac{\pi+n}{n} \right\rfloor = 1$. Il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera del numero reale x, cioè il più grande intero minore o uguale a x.

17. Noioso

Sia $p(x) = ax + b$ un polinomio di primo grado a coefficienti interi. Allora diremo che $p(x)$ è *noioso* se $p(n)$ è sempre pari, o è sempre dispari, per qualsiasi valore intero di n. Supponiamo che $1 \leq a, b \leq 10$ con a, b numeri interi. Quante sono le possibili scelte di a, b tali che il polinomio $p(x)$ sia noioso?

18. Il venditore di stickers

Emanuele il venditore di stickers ha appena aperto un nuovo negozio di stickers, tutti aventi un costo in euro intero. Fuori dal suo negozio, un cartello a caratteri cubitali cita:

Acquistando due stickers, il meno caro è scontato del 25%

Rubens entra nel negozio, acquista due stickers, spende 50 euro ed esce. Quanti valori possibili poteva assumere il prezzo pieno (privo di sconti) dello sticker meno caro?

19. Area interessante

Siano $P_1, P_2, \ldots, P_k$ i punti a coordinate intere che si trovano sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 5$. Trovare l'area del poligono convesso $P_1P_2 \ldots P_{k-1}P_k$.

20. L'invidia è una brutta bestia

Siano n, m due interi positivi. Diremo che n è invidioso di m se la somma delle cifre di n è minore della somma delle cifre di m. Alcuni interi positivi $k > 1$ possono dichiarare: "Tutti gli interi da 1 a $k-1$ mi invidiano!" Qual è il tredicesimo numero, in ordine crescente, che può affermare questa frase?

21. Palazzi

Il comune di Cesenatico vuole costruire 6 palazzi, ciascuno con un numero intero positivo di piani, ma non più di 10. Tuttavia, i palazzi in questione devono essere costruiti in fila indiana, uno dietro l'altro, ma facendo in modo che, guardandoli da un certo lato, sia possibile vederli (anche parzialmente) tutti e 6.

Ad esempio, se guardo una fila di tre palazzi aventi rispettivamente $3, 6, 7$ piani il palazzo da 3 piani nasconde 3 dei 6 piani del secondo palazzo (che comunque risulta visibile, in quanto si vedono 3 piani), e, a sua volta, il palazzo da 6 piani nasconde 6 dei 7 piani dell'ultimo palazzo (che comunque risulta visibile, in quanto si vede 1 piano).

In quanti modi il Comune di Cesenatico può scegliere l'altezza dei sei palazzi facendo in modo che, guardandoli in fila indiana, nessuno dei palazzi sia completamente nascosto?

22. 2022 cifre

Quanti sono gli interi positivi con 2022 cifre decimali e tali che la somma delle loro cifre sia 2?

23. Il numero che piange

Un numero intero positivo N si trova in un angolino. E piange. "Che succede?" domanda 213444 preoccupato.

"Sniff! Nessun quadrato, a parte 1, che se la fa con tutti, vuole dividermi. E tu non puoi capirmi! Tu sei diviso da $4, 121$... e non solo!" dichiara N.

"Sta' calmo. Non si può essere perfetti. Guarda ciò che hai piuttosto che guardare ciò che ti manca. Di certo hai più divisori interi positivi di me." risponde 213444.

"Effettivamente hai ragione, ne ho così tanti che nemmeno ricordo più quanti ne ho." risponde N consolato.

Ma quanti divisori interi positivi aveva N come minimo?

24. Stammi lontano!

Data una circonferenza di centro ω, di centro O e raggio 100, sia P un punto esterno ad ω tale che $OP = 2021$. La retta OP interseca ω in due punti distinti A, B. Determinare il valore di $PA + PB$.

25. Diciamo no alle disuguaglianze

Siano $10 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ interi. Dire per quante quadruple (a, b, c, d) è rispettata la disuguaglianza:

$$a + b + c + d \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2cd}$$

26. Triangolari e circolari

Un numero *triangolare* è un numero intero positivo k tale che esista un intero positivo n per il quale valga l'uguaglianza

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = k$$

Sia k un intero positivo triangolare. Sia R_k il rettangolo di vertici $A_kB_kC_kD_k$, in cui sono incastrate k circonferenze, tutte identiche e di raggio 1 disposte come segue:

- sono disposte k circonferenze, tangenti tra di loro e con i centri che giacciono lungo un segmento che risulta parallelo alla base e queste k circonferenze risultano tangenti alla base di R_k;

- Considerata inoltre un'altra retta parallela alla base, lungo questa retta si trovano i centri di $k-1$ circonferenze in modo tale che esse siano tangenti a due circonferenze della fila sottostante e che ogni circonferenza, eccetto gli estremi, sia tangente a un'altra circonferenza a sinistra e a destra, sempre della stessa fila;
- In generale, considerata la riga a, ci sono a circonferenze, in fila, tangenti tra di loro "a catena", ogni circonferenza della riga a è tangente a due circonferenze della riga $a+1$ e i centri delle circonferenze della riga a giacciono tutti su una retta che è parallela alla base.
- L'unica circonferenza presente sulla riga 1 è tangente alle altre due circonferenze sulla riga 2 e tange la base opposta del rettangolo R_k

Qual è il più piccolo valore di k tale che il perimetro di R_k sia maggiore di 2022?

27. 78125
È possibile scrivere 78125 come somma di M interi positivi consecutivi. Quanto vale M al massimo?

28. Numeri sardi
Un intero positivo n si dice *sardo* se possiede 5 cifre decimali e la somma di due cifre consecutive di n è costante. Per esempio 14141 è sardo, ma 23411 non lo è in quanto $2+3 \neq 3+4$, ad esempio. Quanti sono i numeri sardi?

29. Azienda Regionale Sarda Trasporti
All'interno di una circonferenza ω di raggio 10 e centro O è inscritto il quadrilatero $ARST$, tale che $\widehat{ARS} = 90°$ e $RS = 16$. Sapendo che $TS = TA$, sia X l'intersezione tra AS e RT. Dopo aver calcolato il rapporto $\frac{AX}{SX}$ e averlo espresso nella forma $\frac{p}{q}$ con p, q coprimi, trovare $p+q$.

30. Hai barato!
Nonesisto, un membro della nazione *ImmagiNazione*, invitata alle IMO per la prima volta, è stato squalificato. Infatti, alle IMO ci sono ben due giornate di gara, tre problemi per giornata, di difficoltà crescente, valutabili con un punteggio intero da 0 a 7. La giuria decide di squalificare Nonesisto perché ha ottenuto, nel primo giorno di gara, 0 punti sui primi due problemi e 7 sul terzo problema. -E quindi cosa c'è di strano?- chiede Nonesisto. -C'è che i problemi sono di difficoltà crescente, quindi non puoi ottenere in un certo problema un punteggio superiore ad un punteggio che hai ottenuto su un problema di difficoltà inferiore a tale problema. L'uguaglianza va bene.- risponde la giuria. -Cioè, scusate, quindi se avessi fatto 21 nella prima giornata non mi avreste squalificato, ma con quel punteggio invece sospettate di me?- risponde Nonesisto. -Ebbene sì, le regole sono regole. Non deve esistere una giornata in cui accade quanto detto prima. Ad esempio, se al primo giorno riesci a fare 6 sul P1, 5 sul P2 e 5 sul P3, nessuno ti dirà niente. Questo solo per una giornata, infatti sarebbe legale se tu facessi 4 sul P2 della prima giornata e 7 sul P3 della seconda giornata.- -Ma quindi, con queste regole, nel 2021 avreste squalificato Foschi che, in prima giornata ha ottenuto 0 sul P2 e 1 sul P3?-chiede Nonesisto. -Certo!- risponde la giuria -Ma anche Poletto sarebbe fuori, avendo ottenuto 0 sul P2 della prima giornata e 7 sul P3 della prima giornata. Ora ti chiedo: quante sono le possibili distribuzioni dei punteggi che non destano sospetti?-

31. Bipalindromo
Un numero intero positivo n si dice *bipalindromo* se si legge allo stesso modo sia da sinistra verso destra che da destra verso sinistra e $2n$ ha la stessa proprietà detta sopra. Determinare quanti sono i numeri n bipalindromi tali che $100 \leq n \leq 999$.

32. Intersezioni varie
Sia $PQRS$ un quadrilatero convesso in cui $\widehat{PQR} = \widehat{QRS} = 132°$. Sia T l'intersezione tra PQ e RS. La bisettrice dell'angolo $\widehat{QTR}$ interseca il segmento PS nel suo punto medio. Quanto misura $\widehat{QPS}$?

33. Orue
A Cesenatico circola l'orue, una valuta strana. In particolare, esistono monete aventi come taglio 2 orue oppure 1 orue. Questo paese è strano... i palloni da beach volley costano tutti un numero intero di orue, non più di 150. Inoltre, un pallone da beach volley è tale che il numero minimo di monete necessario per pagarlo è pari. Quanti valori può assumere il costo di un pallone da beach volley a Cesenatico?

34. A very big set
Sia S l'insieme di tutti i polinomi $P(x)$ di grado minore o uguale a 2021, tali che, per ogni coppia di numeri reali (x, y) si abbia

$$P(x^2 - y^2) = P(x-y)P(x+y)$$

Qual è la cardinalità di S?

35. Somma angolare
Sia $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ un esagono regolare. Dire quanto vale, in gradi, la somma

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} \widehat{P_iP_jP_k}$$

36. Prima uno, poi due, infine tre
Se a, b, c sono interi positivi tali che $a + ab + abc = 2022$, quanto vale al massimo il prodotto abc?

37. Prodotto di differenze
Cinque numeri (a, b, c, d, e) soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} (4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 16 \\ (5-a)(5-b)(5-c)(5-d)(5-e) = 25 \\ (6-a)(6-b)(6-c)(6-d)(6-e) = 36 \\ (7-a)(7-b)(7-c)(7-d)(7-e) = 49 \\ (8-a)(8-b)(8-c)(8-d)(8-e) = 64 \end{cases}$$

Quanto vale $(9-a)(9-b)(9-c)(9-d)(9-e)$?

38. Buona Pasq... ah no!
Affamato, Bagordo e Cicciotto sono tre coniglietti alla ricerca di uova. Un negoziante decide di adottarli; tuttavia, oggi deve svolgere un compito importante: ha preparato infatti 3 pacchi da spedire. Il primo pacco contiene 10 uova gialle, il secondo pacco contiene 10 uova blu, il terzo pacco contiene 10 uova rosse. Un pacco non si può spedire se risulta incompleto anche di un solo uovo. Nella notte, Affamato apre una scatola a caso e mangia un uovo, così come Bagordo e Cicciotto che scelgono una scatola a caso, da cui prelevano un uovo per mangiarlo. Il giorno dopo il negoziante dichiara: "Maledetti! Per colpa vostra ora non ho nemmeno un pacco idoneo alla spedizione!"
Qual era la probabilità che ciò accadesse? Dopo averla espressa nella forma p/q con p, q interi positivi primi tra loro, determinare $p + q$.

39. Prodotto noto, ma la somma?
Trova tutte le coppie (a, b) con $a \geq b$ di interi positivi tali che $mcm(a, b) + MCD(a, b) = 92$. Per ciascuna coppia calcola il prodotto ab e inserisci poi come risposta la somma di tutti i prodotti trovati.

40. Gita in montagna
Tiziana e Valentino fanno una gita in montagna: visiteranno il *Monte Troccolo* e il *Monte Troccolino*. Visti da lontano, sono due triangoli equilateri ABC e $A'B'C'$, con B, C, B', C' allineati in quest'ordine e in particolare $C \equiv B'$, e i punti A, A' sono dalla stessa parte rispetto alla retta BC. Valentino nota che l'area del triangolo ACA' vale $6\sqrt{3}$. Tiziana invece si chiede, sulla base di queste informazioni se il prodotto tra le aree dei triangoli ABC e $A'B'C'$ è univocamente determinato. Ebbene sì, lo è! Quanto vale?

41. La riflessione di Alberto
Alberto: -Bah, tante coppie. Eppure io sono ancora single. In giro vedo che persino i numeri, oggetti inanimati, sono in coppia tra di loro. Tra l'altro, se consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e l'insieme $B = \{31, 32, 33, \ldots, 40\}$, ormai la moda è che un elemento $a \in A$ esce con un elemento $b \in B$ se e solo se $2^a + 2^b + ab$ è un multiplo di 3. Mi sento talmente single che mi sono messo a calcolare quante sono le coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ tali che a, b escano insieme. Quante sono?-

42. Eppure Alberto è carino...
-Eppure Alberto è carino- pensa Barbara, mentre ha disegnato su un foglio un triangolo ABC e ha preso il punto D sul lato BC tale che $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Detto O il circocentro del triangolo ABD ha notato che i punti A, O, D, C giacciono su una circonferenza e che $\widehat{OCA} = 22°$. -Chissà se Alberto pensa che io sia un'oca. Chissà se gli piaccio. Però se non sa trovare la misura in gradi dell'angolo in A, non ci uscirei proprio.-

43. Pasticciere pasticcione
Un pasticciere pasticcione ha scordato di pagare la bolletta della luce, lasciando il suo laboratorio al buio. Nel suo laboratorio però c'erano tre tipi di dolci, tutti indistinguibili al buio: sospiri, bigné e cassate. Tuttavia sa benissimo che per essere certo di prendere una cassata doveva estrarre in totale 56 dolcetti, per essere certo di prendere un sospiro ne doveva prendere 71, per essere certo di prendere un bigné ne doveva prendere 92. Detti S, B, C rispettivamente il numero di sospiri, di bigné e di cassate presenti nel laboratorio, quanto vale SBC?
Il sospiro è un dolce tipico pugliese, in particolare di Bisceglie.

44. 4044 punti ben distribuiti
È dato un insieme di 4044 punti nel piano, chiamati $A_1, A_2, \ldots, A_{2022}, B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{2022}$. Per ogni intero $1 \leq i \leq 2022$ il punto A_i ha coordinate $(i, 2)$ e il punto B_i ha coordinate $(i, 0)$. Vogliamo tracciare 2022 segmenti tali che:

- Ogni segmento (e non retta) deve intersecarsi con ogni altro segmento;
- Ogni segmento colleghi un punto A_m e un punto B_n;
- Ognuno dei 4044 punti sia estremo di uno e un solo segmento.

Per ogni modo di disegnare dei segmenti rispettando le proprietà sopra, calcoliamo il valore assoluto del prodotto dei coefficienti angolari delle rette contenenti tutti i segmenti disegnati. Tra questi prodotti, si selezioni il massimo, esprimibile nella forma p/q con p, q interi positivi primi tra loro. Determinare le ultime due cifre di p.

45. Il divorzio di Alberto e Barbara

Alberto e Barbara hanno annunciato il loro divorzio. Ora vivono in due case separate, e non vogliono nemmeno incontrarsi in giro. Alberto vive infatti nel vertice in alto a sinistra di una griglia 3×3, mentre Barbara vive nel vertice in basso a destra. Alberto può muoversi solamente in basso e a destra di una casella, mentre Barbara solamente in alto o a sinistra. Alberto e Barbara lavorano per l'azienda *Coccodrillo Postino* e ognuno di loro è costretto, purtroppo, a consegnare ogni giorno la posta all'ex-partner. Ogni minuto, si spostano di una casella secondo i criteri sopra indicati. In quanti modi i due possono scegliere i loro percorsi in modo tale da non incontrarsi mai?

46. Diofantea quadratica

Siano x, y numeri interi tali che $4x^2 + 13x = y^2$. Per ciascuna coppia che soddisfa tale relazione, si calcoli il valore di $|x| + |y|$ e si faccia la somma di tutti i risultati ottenuti. Che numero si ottiene?

47. Quadruple a sistema

Dire quante sono le quadruple di interi positivi (w, x, y, z) tali che $\begin{cases} w + x + y = 37 \\ wxy + 2021 = 2z \end{cases}$

48. Tre angoli uguali!

Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso in cui $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 74°$. Siano P, Q rispettivamente l'intersezione tra AD e BC e l'intersezione tra AB e CD. Sia S il circocentro di ABC. Quanto vale, in gradi, $\widehat{ASQ} + \widehat{PSC}$?

49. Prigioniero

Sia $1 \leq n \leq 100$ un numero intero. Diremo che n è *prigioniero di cubi* se esiste almeno un intero positivo $k > 1$ tali che k^3 sia un divisore di n. Quanti sono i prigionieri di cubi?

50. Punti medi un po' ovunque

Sia ABC un triangolo in cui gli angoli in A, B, C misurano rispettivamente $50, 60, 70$ gradi. Siano AD, BE, CF le altezze del triangolo, che si intersecano nell'ortocentro H. Sia Q il punto medio di BH e L il punto medio di BC. Quanto misura in gradi l'angolo $\widehat{QFL}$?

51. Risultato primo

Un dado non truccato a 6 facce numerate da 1 a 6 viene lanciato tre volte e, per ogni lancio, si prende nota del valore uscito. Poi si fa la somma dei tre valori ottenuti: qual è la probabilità percentuale che questa somma sia un numero primo?

52. Radici in progressione

Le radici del polinomio $p(x) = x^3 - 39x^2 + 482x - m$ sono tutte in progressione aritmetica. Quanto vale m?

53. Porta rispetto!

Marco e suo padre Luca sono nati lo stesso giorno. Tempo fa, Luca disse a Marco: "Porta rispetto, ho il quadruplo della tua età!". Quattro anni dopo, Luca disse a Marco: "Porta rispetto, ho il triplo della tua età!". Crescendo, Marco ha notato che doppio, triplo o quadruplo, non cambia niente, il rispetto è sempre richiesto. Però una domanda se la pone: quanti anni avrà nel momento in cui avrà la metà degli anni del padre?

54. *****

Al mio paese, questo gioco ha il nome di una parolaccia. Vedo di spiegarvelo. C'è un mazzo di sedici carte, quattro carte presentano il numero "1", quattro carte presentano il numero "2", quattro carte presentano il numero "3", quattro carte presentano il numero "4". 4 persone (Alberto, Barbara, Cecilia e Diana) sono sedute attorno ad un tavolo rotondo e sono a loro distribuite 4 carte del mazzo. Ad ogni turno, ogni giocatore sceglie una carta da scartare e la passa al giocatore alla sua sinistra. Quando un giocatore ha 4 carte riportanti lo stesso numero, il giocatore grida: "*****". Ad un certo punto, Alberto, e soltanto Alberto, ha gridato: "*****", aveva infatti quattro carte con sopra il numero 4. Quante sono le possibili distribuzioni delle restanti 12 carte tra i 3 amici in modo tale che tale situazione si verifichi?

55. Pic-nic tra numeri

Sia n un intero positivo. I numeri hanno deciso di fare un pic-nic sul prato! Da una comitiva $C = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ di n numeri è stato scelto un gruppo di 5 numeri in modo tale che per loro sia possibile disporsi attorno ad un tavolo rotondo in modo che la somma tra due vicini di tavolo sia sempre multipla di 6. Sapendo che era possibile scegliere almeno 17 gruppi distinti, quanto vale n come minimo?

56. Salvatore passione frullati

Salvatore, amante dei frullati, decide di recarsi presso un bar dove vengono venduti frullati. Nella preparazione di un frullato, vengono utilizzati quattro frutti, eventualmente ripetuti, se un cliente desidera doppia (o tripla, o quadrupla) presenza di un frutto in particolare. Sapendo che il bar ha a disposizione 100 mele identiche, 100 pere identiche, 100 angurie identiche, 100 lamponi identici, 100 mirtilli identici, 100 limoni identici, 100 fragole identiche e 100 arance identiche in quanti modi può essere composto un frullato?

57. Ah!

Un triangolo ABC, isoscele sulla base BC lunga 20, è tale da avere $\widehat{BAC} \neq 90°$. Siano H l'ortocentro di ABC, D il punto medio di BC e supponiamo che AH e AD siano segmenti di lunghezza intera. Qual è la somma di tutti i possibili valori per AH?

58. Razionalità quadratica

Per ogni intero positivo n definiamo il polinomio

$$Q_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{i} \cdot x^i$$

Chiamiamo S_n la somma dei quadrati delle radici complesse di $Q_n(x)$. Per quanti interi positivi $n \leq 2021$ accade che $S_n \in \mathbb{Q}$?

59. Cioccolatoso

Chamiamo $S(n)$ la somma delle cifre decimali dell' intero positivo n. Diciamo che n è *cioccolatoso* se esiste almeno un numero primo p tale che $S(p) \mid p$ e $p \mid n$. Determinare il numero di interi cioccolatosi nell'intervallo $[1, 2021]$.

60. Senza zeri

Per ogni intero positivo i sia $N_0(i)$ il numero i privato di tutti gli zeri nella sua rappresentazione decimale. Ad esempio $N_0(2022) = 222$. Dire per quanti interi positivi $k \leq 1000$ si ha che

$$N_0(k) + N_0(k+1) = 2k + 1$$

61. Algoritmo

Preso un intero positivo n, sia $A(n)$ il numero che si ottiene partendo dalla somma delle cifre di n e, se il numero ottenuto ad un certo passo ha più di una cifra, si continua, altrimenti ci si ferma. Ad esempio $A(98324) = 8$ in quanto $9 + 8 + 3 + 2 + 4 = 26$, ma 26 ha più di una cifra quindi $A(98324) = 2 + 6 = 8$. Trovare il valore della somma:

$$A(2021) + A(2021^2) + A(2021^3) + \cdots + A(2021^{2021})$$

62. Area di un trapezio

Sia $ABCD$ un trapezio in cui i lati paralleli sono AB e CD. Sapendo che gli angoli in A, B sono acuti, e che i lati hanno le seguenti misure: $AB = 69, BC = 60, CD = 6, DA = 39$, quanto vale l'area del trapezio?

63. Mathinata

Leonardo e Tiziana hanno intenzione di diventare cittadini onorari di Mathinata, in provincia di $F(oggia)$. Per diventare cittadini onorari di Mathinata, bisogna superare un test contenente 6 domande a risposta multipla, con 4 alternative. Per ogni domanda, c'è una risposta corretta, due risposte quasi corrette, e una risposta sbagliata. La risposta corretta vale 1 punto, la risposta quasi corretta vale $\frac{1}{2}$ punto, la risposta sbagliata vale 0 punti. Per diventare cittadini onorari di Mathinata, bisogna fare almeno 4 punti in questo test. Qual è la probabilità che, sparando tutte le risposte completamente a caso, Tiziana diventi cittadina onoraria di Mathinata? Dopo aver espresso tale probabilità nella forma p/q con p, q coprimi, si determini $p + q$.

64. Tratto da una storia vera

Ci sono tre luoghi di interesse in questo problema: il supermercato S, un incrocio I e la fermata F, ed esiste una strada SI lunga 150 metri, così come una strada IF lunga 60 metri, e l'angolo $\widehat{SIF}$ misura 90 gradi. Tutti i mezzi di trasporto possono transitare solo sulle strade SI e IF, perché il resto della zona è ricoperto da un prato. Esco dal supermercato dopo aver comprato un ottimo cornetto al cioccolato e, dopo aver percorso un tratto della strada SI, mi siedo su una panchina per gustare il mio cornetto, finché non mi vedo passare davanti il bus, che dovrà fermarsi nel punto F, che viaggiava ad una velocità costante di 7 m/s. Improvvisamente, mi alzo di scatto e taglio per il prato, correndo costantemente a 5 m/s, riuscendo ad arrivare nell'esatto istante in cui il pullman raggiunge la fermata, passando solo per l'asfalto. Quanti metri dista la panchina dal supermercato? Dare come risposta la somma di tutti i possibili valori.

65. Problema dedicato a Max

Sia X un punto interno al triangolo ABC in cui $AB = 70, BC = 80, CA = 90$ tale che $\widehat{AXM} = \widehat{ABC}$, dove M è il punto medio di CB. La circonferenza circoscritta al triangolo MAX interseca nel punto Y, distinto da A, il lato AB. Determinare CY^2.

66. Citylife

Sotto le Tre Torri, nel quartiere Citylife di Milano, cinque amici discutono dell'equazione $x^2 = 7y + z$, con x, y, z interi e $z > 0$. E ci si chiede per quanti valori di $z \leq 2022$ esiste una terna (x, y, z) che soddisfa tale equazione. Una voce divina suggerisce: "Usa il Delta!"

67. 3 elevato...

Determinare il più grande intero positivo M tale che:

$$\frac{(1+2+3)(2+3+4)(3+4+5)\dots(2020+2021+2022)}{3^M}$$

sia intero.

68. Sottoinsiemi gemelli

Siano A, B due insiemi. Diciamo che A, B sono *gemelli* se $|A \cap B| = x$ e $x \in A, B$. Per esempio gli insiemi $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{2, 4, 7\}$ sono gemelli in quanto la loro intersezione contiene 2 elementi e, in più, 2 appartiene sia ad A che B. Determinare il numero di coppie di sottoinsiemi (A, B) dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 2021, 2022\}$ tali che A, B siano gemelli.

69. Accoppia bene!
Denis e Taulant hanno inventato il seguente gioco. Una persona esterna sceglie un intero positivo $n > 1$ non primo né quadrato perfetto, e scrive su una lavagna tutti i divisori interi positivi di n, esclusi 1 e n. Successivamente, Denis cancella un numero i scritto sulla lavagna, Taulant cancella anch'essa un numero j tra quelli scritti sulla lavagna ma in modo tale che $MCD(i, j) > 1$. Taulant perde se non può cancellare più un numero dalla lavagna in modo tale che il massimo comun divisore tra il numero scelto da Denis ad un certo turno e quello scelto da lei sia maggiore di 1, se invece può farlo sempre, Taulant vince. Determinare qual è il più piccolo intero > 3000 tale che Denis abbia una strategia vincente.

70. Somma e differenza
Diremo che un intero positivo n è *pasquale* se esistono degli interi positivi x, y tali che $x + y = n$ e $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{13}{72}$. Quanto vale la somma degli interi positivi pasquali?

71. Wlad ladro di figurine
Wlad il ladro di figurine, insoddisfatto delle sue 2 figurine iniziali, entra in competizione con Chiara, che in realtà all'inizio ha 1 sola figurina. Rubens possiede 8 figurine identiche, ma non sa che farsene. Per 8 giorni di fila, ogni giorno, Rubens prende una figurina e la regala a uno dei due amici, purché Wlad abbia sempre un numero di figurine maggiore o uguale a quello di Chiara, altrimenti Wlad strappa le figurine dall'album di Chiara e le incolla sul suo. Ad esempio, il primo giorno può regalare una figurina a Wlad, il secondo giorno ancora a Wlad, il terzo a Chiara, e la disuguaglianza sarebbe sempre rispettata. In quanti modi Rubens può programmare il regalo delle figurine ai due ragazzi lasciando integro l'album di Chiara?
(Due modi differiscono solo se in un dato giorno Rubens dà una figurina a Chiara piuttosto che a Wlad, o viceversa)

72. Combinatorics League
Alla Combinatorics League partecipano 32 squadre, chiamate $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{32}$. Ogni squadra suddetta ha un proprio valore di forza, in particolare la squadra S_i ha un valore di forza F_i e $F_1 > F_2 > \cdots > F_{32}$. Le 32 squadre vengono accoppiate in 16 incontri; i vincitori dei 16 incontri vengono poi accoppiati in 8 incontri i cui vincitori passano al turno successivo... e così via. Inoltre, considerate due squadre che si incontrano, avrà sempre la meglio la squadra col valore di forza maggiore.
Sulla base di questa informazione, tenendo conto dei vari accoppiamenti possibili, qual è la probabilità che la squadra S_3 arrivi alle semifinali (ossia la fase in cui gareggiano in totale 4 squadre)?
Dopo aver espresso la probabilità nella forma p/q con p, q interi positivi, calcolare $p + q$.

73. I complessi ignoti
Siano p, q, r numeri complessi, tali che $pqr = 2022$. Supponiamo che:

$$p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + r^2q + rq^2 = 1$$

e che entrambe le quantità $p + q + r$ e $pq + qr + rp$ siano intere positive. Qual è la somma di tutti i possibili valori che può assumere $p + q + r$?

74. Tagliolini cacio e pepe
Simone ha davanti un piatto di tagliolini cacio e pepe, successivamente divorati con un certo entusiasmo. La cameriera, con un certo stupore, ha infatti esclamato: "Ma hai lavato il piatto!"
Simone, fiero di sé, risponde: "Questo accade perché, dati m, n interi positivi, definisco $f(m, n)$ come la minima cardinalità di un sottoinsieme S dell'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ tale che la somma degli elementi di S sia pari a n. Per esempio $f(4, 7) = 2$ perché $7 = 3 + 4$. La quantità di tagliolini in grammi era proprio giusta, ossia, definito un intero positivo k, era proprio il numero di k-uple di interi positivi $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ con $a_i > a_{i+1}$ per ogni i tali che

$$\sum_{j=1}^{k} f(22, a_j) = 2022$$

Qual è la quantità in grammi di tagliolini cacio e pepe che ho mangiato?"
La cameriera scompare, ma Simone, dopo un soddisfacente pranzo, inizia a parodizzare Brividi di Mahmood e Blanco.

75. Probabilità con i reali?!
Siano x, y numeri reali tali che $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Qual è la parte intera della probabilità percentuale che valga la disuguaglianza: $\sqrt{x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$?

76. Le due proiezioni
Sia ABC un triangolo con $AB = 9, BC = 8, CA = 7$. Detto M il punto medio del lato BC siano H, P due punti rispettivamente sulle rette AC e AM tali che $AC \perp BH$ e $BP \perp AP$. Sia T l'intersezione tra la retta perpendicolare a BC passante per P e la retta BH. Detta $[T]$ l'area del triangolo T determinare il valore di $1000 \cdot \left(\frac{[ATB]}{[THC]}\right)^2$.

77. Apri tutte le porte!
Gianni sta andando forte, e sta aprendo tutte le porte. A Sanremo c'è un corridoio con 2022 porte numerate da 1 a 2022, inizialmente sono tutte chiuse. Gianni fa 10 viaggi tentando di aprire quante più porte possibili. Parte dal fondo del corridoio, e al viaggio i corre (andando forte) eseguendo le seguenti azioni per ogni porta:

- Se una porta aperta contiene, nel suo numero, la cifra $i-1$, la chiude;
- Se una porta chiusa contiene, nel suo numero, la cifra $i-1$, la apre;
- Se una porta non contiene nel suo numero la cifra $i-1$, lascia il suo stato invariato.

-Oh no! Non ho aperto tutte le porte.- esclama Gianni. Quante ne ha aperte?
Ad esempio, la porta 2022 è aperta nel viaggio 1, ma viene chiusa poi nel viaggio 3, quindi resterà chiusa.

78. Ahio!
Sia ABC un triangolo con $AB = 130, BC = 140, CA = 150$, avente ortocentro H, incentro I e circocentro O. Siano D, E, F le intersezioni tra la circoscritta ad ABC e le rette AO, AI, AH. Chiamiamo inoltre P l'intersezione tra AE e CD, sia infine Q l'intersezione tra AF e CE. Qual è l'area del quadrilatero $BCPQ$?

79. Composizione
Denotiamo con $p^{(n)}(x)$ la composizione del polinomio $p(x)$ esattamente n volte. Per esempio $p^{(3)}(x) = p(p(p(x)))$. Per un certo polinomio $p(x)$ a coefficienti reali accade che:

$$p^{(2)}(x) = p^{(4)}(x) = p^{(6)}(x) = \cdots = p^{(2022)}(x) = x$$

e $p^{(2021)}(2021) = 0$. Quanto vale $p(10)$?

80. La funzione nascosta
Sia $\mathbb{N}_{\geq 0}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 0. Sia inoltre $f : \mathbb{N}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ una delle funzioni che soddisfa, per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 9$$

Trovare la somma di tutti i valori possibili che può assumere $f(2022)$.

81. Il panettiere impreciso
Un panettiere ha sfornato m saccottini al cioccolato e n saccottini alla marmellata. Un cliente arriva e dice: -Voglio due saccottini a caso.- Il panettiere risponde quindi: -Ok, sappi che ho infornato lo stesso numero di saccottini al cioccolato e saccottini alla marmellata. La probabilità che i saccottini che acquisterai siano entrambi di gusti diversi è quasi del 50%.- -Quasi?!- chiede perplesso il cliente. -Sì, ad essere precisi la probabilità è 63/124, che approssimando è circa 50%.- Il cliente replica: -Hai detto bene... circa! Però a quanto pare non è vero ciò che dici.- Il panettiere risponde: -Sì, sono impreciso. Infatti le due quantità non erano uguali. C'erano più saccottini al cioccolato che alla marmellata.- Il cliente a questo punto vi chiede: -Qual è la somma di tutti i possibili valori che può assumere il numero di saccottini al cioccolato?-

82. Concatenando numeri enormi
Teresa possiede 100 tessere sulle quali sono scritti i quadrati perfetti da 1 a 2022^2. Poi pensa che se mettesse tutte le tessere da sinistra verso destra in ordine crescente otterrebbe il numero

$$1491625364964\ldots4088484$$

Che resto si otterrebbe se tale numero venisse diviso per 45?

83. Lunghezza data
Sia ABC un triangolo in cui $AB = 7, BC = 8, CA = 9$. Il punto X sta sul lato BC in modo che $BX = 6$. Detto O il circocentro di ABC, la retta XO interseca l'altezza uscente da A nel punto Y. Determinare la lunghezza di AY. Dopo aver espresso il valore di AY^2 nella forma p/q con p, q interi positivi primi tra loro, dare come risposta $p + q$.

84. Il semaforo
Giada possiede 3 buste di gettoni: 6 rossi identici, 6 gialli identici e 6 verdi identici. Pesca complessivamente 6 gettoni, una certa quantità dalla prima busta, una certa quantità dalla seconda, una certa quantità dalla terza, eventualmente queste quantità potrebbero essere anche nulle. Dispone poi i 6 gettoni pescati su un tabellone 1×6 con ogni casella piena con uno e un solo gettone, poi gioca al seguente gioco, che ha l'obiettivo di rimuovere tutti i gettoni dal tavolo. Le mosse legali sono due, considerate due caselle consecutive, entrambe contenenti un gettone:

- Se ci sono due gettoni dello stesso colore, toglie entrambi i gettoni dal tabellone;
- Se ci sono due gettoni di colore diversi, li scambia di posto.

Assumendo che i gettoni di un certo colore sono tutti indistinguibili, quante sono le possibili disposizioni iniziali dei gettoni in modo tale che Giada riesca, prima o poi, a rimuovere tutti i gettoni dal tavolo?

85. Triangolo merluzzo
Sia D il punto sul lato BC del triangolo ABC tale che $AD \perp BC$. Siano O il circocentro di ABC; γ_A, γ_B le circonferenze circoscritte ai triangoli BOD e COD. Siano X, Y rispettivamente la seconda intersezione tra γ_A e AB e la seconda intersezione tra γ_B e AC. Se $AB = 14, BC = 16, CA = 18$, qual è il raggio del cerchio passante per D, X, Y? Dopo aver espresso tale risultato nella forma $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ con a, b, c interi positivi coprimi e c libero da quadrati, dare come risposta $a + b + c$.

86. Sestuple con somma nota

Sia M un intero positivo. Siano $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ interi positivi tali che $\sum x_i = M$. Definiamo $f(M)$ il numero di sestuple ordinate $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ tali che le frazioni $(x_1+x_2)/(x_3+x_4), (x_2+x_3)/(x_4+x_5), (x_3+x_4)/(x_5+x_6),$
$(x_4+x_5)/(x_6+x_1), (x_5+x_6)/(x_1+x_2), (x_6+x_1)/(x_2+x_3)$ siano tutti numeri interi. Trovare quanti sono i possibili valori di M, minori o uguali a 2022, tali che $f(M)$ sia un multiplo di 5.

87. A tre a tre

Determinare il valore di:

$$\mathrm{MCD}(1,2,3)\cdot \mathrm{mcm}(1,2,3) + \mathrm{MCD}(2,3,4)\cdot \mathrm{mcm}(2,3,4) + \cdots + \mathrm{MCD}(2021,2022,2023)\cdot \mathrm{mcm}(2021,2022,2023)$$

88. Carina questa funzione!

Per ogni intero positivo n sia $f(n)$ il rapporto tra n e la somma delle sue cifre. Ad esempio $f(2022) = 2022/(2+0+2+2) = 337$. Stabilire il valore di:

$$f(100) + f(101) + f(102) + \cdots + f(999)$$

89. Primi contati con molteplicità

Sia n un intero positivo. Chiamiamo $f(n)$ il numero di primi non necessariamente distinti che compaiono nella fattorizzazione di n. Per esempio $f(12) = 3$ poiché $12 = 2^2 \cdot 3$. Sia $g(n)$ il numero di interi positivi $k \leq n$ tali che $f(k) \geq f(j)$ per ogni $j \leq n$. Quanto vale $g(1) + g(2) + \cdots + g(99)$?

90. Un prodotto che non finisce presto

Sia x un numero che soddisfa la relazione $x + \frac{1}{x} = 1$. Determinare quanto vale

$$\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\cdots\left(x^{2022}+\frac{1}{x^{2022}}\right)\right|$$

91. Young, wild and three

In generale si definisce $v_p(n)$, dato un numero primo p e un intero positivo n, il massimo intero positivo k tale che n sia multiplo di p^k. Ad esempio $v_5(250) = 3$. Definiamo inoltre $g(n) = n \cdot 3^{5-v_3(n)}$. Quanto vale $g(135) + g(136) + g(137) + \cdots + g(418) + g(419) + g(420)$?

92. Due e cinque

Dopo aver espresso la somma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{5^{2^k}+1}$$

nella forma p/q con p, q interi positivi primi tra loro, calcolare $p + q$.

93. Tutti e tre quadrati?!

Siano x, y, z interi positivi tali che $x^2 + 2y + z, y^2 + 2z + x, z^2 + 2x + y$ siano tutti e tre quadrati perfetti. Qual è la somma di tutti i possibili valori che può assumere $x + y + z$? (Si contino eventuali valori ripetuti una sola volta.)

94. Tonight we gon' be it on the floor

Dire quanto vale la somma

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{\sqrt{2022}}{\sqrt{2021}-\sqrt{2020}} \right\rfloor$$

95. Alla ricerca della focaccia!

Denis e Taulant sono alla ricerca di un posto dove si vende la tipica focaccia genovese. Per quanto strano possa sembrare, però, non trovano un posto che piace a entrambi. Così camminarono per N chilometri a piedi, dove N è definito in seguito.
Siano $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2021}$ numeri interi, tali che, per ogni indice $1 \leq i \leq 2021$ si abbia $1 \leq a_i \leq 2021$. Presi due termini della sequenza (a_i, a_j) con $i \neq j$ definiamo:

$$[a_i, a_j] = \frac{a_i - a_j}{i - j}$$

Vengono poi calcolate le $2021 \cdot 2020$ quantità ottenute accoppiando tutti gli interi da 1 a 2021 in ogni modo possibile, tenendo conto dell'ordine, cioè si determinano i valori di:
$[a_1, a_2], [a_1, a_3], \ldots, [a_1, a_{2021}], [a_2, a_1], [a_2, a_3], \ldots, [a_2, a_{2021}], \ldots, [a_{2021}, a_1], [a_{2021}, a_2], \ldots, [a_{2021}, a_{2020}]$. Si sa che tra le quantità calcolate esistono almeno due coppie di interi positivi (r, s) tale che $[a_r, a_s] < 0$. Una successione $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2021})$ che rispetta l'esistenza di tali coppie si dice *ligure*. Se N è il numero di successioni liguri, si determini per quanti chilometri hanno camminato Denis e Taulant. Dare come risposta le ultime 2 cifre del risultato.

96. Numeri curiosi

Michele ha scoperto un sottoinsieme degli interi positivi: i *numeri curiosi*. Un intero positivo n si dice infatti *curioso* se, scritti i k divisori di n e ordinati nel modo seguente:

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

allora si ha che, detto $\tau(n)$ il numero di divisori interi positivi di n, che $\tau(d_i) \mid k$ per tutti gli interi positivi $1 \leq i \leq k$.
Ad esempio, 21 è curioso in quanto è diviso da $1, 3, 7, 21$. Questi numeri hanno rispettivamente $1, 2, 2, 4$ divisori positivi che sono divisori di 4, cioè il numero di divisori di 21.
Michele sceglie ora un intero $C > 2022$, un numero curioso. In generale, dati due interi positivi (a, b) si definisce

$$f(a, b) = \mathrm{MCD}(\mathrm{MCD}(a, b), \mathrm{mcm}(a, b), a, b)$$

Michele calcola quindi la somma

$$\sum_{j=1}^{C} f(j, C)$$

e poi esclama: -Il risultato è primo!-
Quanto vale C come minimo?

97. Base lato e vertice su bisettrice

Sia ABC un triangolo in cui $AB = 28, BC = 32, CA = 36$. Sia P un punto preso sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$ tale che $AP = CP$. Siano Q, R due punti rispettivamente sulle semirette BA, CA presi in modo tale che $BC = BQ = CR$. Sia Ω la circonferenza circoscritta ad ABC. Sia $T \neq A$ l'intersezione tra la circonferenza circoscritta al triangolo AQR e Ω. La circonferenza circoscritta al triangolo APT interseca la retta BT nuovamente nel punto L. Trovare BL. Dopo aver espresso tale misura nella forma $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ con a, b, c interi positivi tali che a, b siano primi tra loro e c non sia divisibile per il quadrato di un primo, dare come risposta $a + b + c$.

98. Un po' strano questo problema...

Consideriamo l'insieme $X = \{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$. Per ciascun elemento $n \in X$, consideriamo l'insieme $A_n = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ e chiamiamo $g(n)$ la probabilità che preso un elemento $u \in A_n$ si abbia che n divida $\sum_{i=1}^{u} i$. Supponiamo di ripartire l'insieme X in m sottoinsiemi S_i tali che, se $a, b \in X$ con $a \neq b$ e $g(a) = g(b)$ allora a, b sono nello stesso sottoinsieme. Quanto vale $\prod_{i=1}^{m} |S_i|$, se $|S|$ è la cardinalità di S?

99. Ho un problema, ma non mi basta non ironicamente il foglio per scriverlo

Consideriamo le quaterne (a, b, c, d) di interi positivi tali che la frazione:

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4+a^3+b^3+c^3+d^3+(a^2+b^2+c^2+d^2)(ab+bc+cd+ac+bd+ad)+abc(1+d)+bcd(1+a)+cda(1+b)+dab(1+c)}{a(a^2+bc)+b(b^2+cd)+c(c^2+da)+d(d^2+ab)}$$

sia uguale a 2022. Quanto vale al massimo $abcd$?

100. Concorrenti piangenti, disegnate le tangenti

È dato un triangolo ABC i cui lati hanno misura $AB = 26, BC = 28, CA = 30$, i suoi vertici giacciono su una circonferenza Γ. Siano M_a, M_b, M_c rispettivamente i punti medi dei lati BC, CA, AB. Definiamo N_a come il punto su Γ appartenente all'arco minore BC tale che il triangolo BAN_a sia ordinatamente simile a CAM_a, mentre N_b e N_c giacciono rispettivamente sugli archi minori CA, AB in modo che si abbia la similitudine dei triangoli CBM_b e N_bBA oltre che a quella dei triangoli BM_cC e N_cAC. Siano t_a, t_b, t_c le rette tangenti alla circonferenza Γ passanti per i punti N_a, N_b, N_c rispettivamente. Definiamo inoltre i punti X_a, X_b, X_c come segue: $X_a = t_a \cap BC, X_b = t_b \cap CA, X_c = t_c \cap AB$. Sia Y_a il punto di intersezione tra il segmento AM_a e la circonferenza avente come diametro X_aM_a, Y_b l'intersezione tra il segmento BM_b e la circonferenza avente come diametro X_bM_b, Y_c l'intersezione tra il segmento CM_c e la circonferenza avente come diametro X_cM_c. Chiamiamo inoltre ω la circonferenza passante per i punti Y_a, Y_b, Y_c. Chiamiamo Γ' l'immagine della circonferenza Γ dopo una simmetria assiale rispetto alla retta BC. Le circonferenze Γ' e ω si intersecano in due punti D, E. Sia γ la circonferenza passante per M_a, M_b, M_c. Siano P_a, P_b, P_c rispettivamente, le seconde intersezioni tra la circonferenza γ e i lati BC, CA, AB. Siano infine $F = P_aP_b \cap DE$ e $G = P_aP_c \cap DE$. Determinare quanto vale $P_aF + P_aG$. Dopo aver espresso tale risultato nella forma p/q con p, q interi positivi primi tra loro, dare come risposta $p + q$.

I problemi finiscono qui, spero che tu ti sia divertito!

Cari olimpionici,
non voglio dedicare la gara a delle persone in particolare, bensì essere più inclusivo e rivolgermi a chiunque in questo periodo sia stato in grado e abbia avuto voglia di darmi una mano.
Sono giunto ormai al termine di un percorso quinquennale che ha avuto alti e bassi. Non avrò avuto risultati eccellenti nelle gare, tuttavia spero di aver lasciato un'impronta in questa sfera olimpica; perché la mia priorità non era quella di allenarmi, bensì quella di allenarmi aiutando gli altri. Fu proprio così che iniziai a scrivere gare, a organizzare un po' di tutto, anche stages online, nei limiti delle mie possibilità, fino ad arrivare all'apice del divertimento e della razionalità: la One Hundred Problems.
Chi mi conosce sa benissimo che per me gli anni mediani non sono stati affatto felici, ho accumulato una delusione dopo l'altra, ma da poco ho trovato la forza per andare avanti, aggrappandomi a ciò che ho sempre fatto e amato fare: creare un ambiente favorevole per tutti. Ci si sente ripagati nel momento una persona che hai aiutato, direttamente o indirettamente, è soddisfatta del proprio rendimento, a prescindere dal numero che descrive una propria prestazione in un dato arco di tempo. Voglio ringraziare le persone che mi hanno sopportato e supportato sempre, in particolare nell'arco di tempo un po' travagliato menzionato di sopra, nonostante non sempre, lo ammetto, io sia stato in grado di comprendere le mie potenzialità.
Chi più, chi meno, spero di aver contribuito a rendere piacevole la vostra esperienza nel campo delle Olimpiadi di Matematica. Sono certo che siate stati voi a rendere piacevole la mia, apprezzando il mio lavoro, per nulla scontato e fatto solo con il desiderio di fare qualcosa per il bene comune. La VI One Hundred Problems è qui anche per merito vostro.
Per me adesso comincia un altro tipo di vita, e non credo che avrò più il tempo che ho avuto oggi per organizzare tutto ciò di cui sono stato autore. La mia promessa è che farò il possibile, in ogni caso, affinché sia possibile la riuscita di una piccola fetta di ciò che ho fatto in questi cinque anni.

Vi voglio bene,
Matteo Salicandro