Simulazione Test Iniziale Stage Senior

Tempo a disposizione: 150 minuti

1. Siano $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2021}$ interi positivi distinti tali che $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{2021}^2$ sia un multiplo di 3. Quattro amici, Anastasia, Benito, Ciccio e Diana pronunciano le seguenti affermazioni.

- Anastasia afferma: "Il prodotto $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2021}$ è sicuramente un multiplo di 9."
- Benito afferma: "La quantità $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2021}$ è sicuramente un multiplo di 3."
- Ciccio afferma: "La quantità $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{2021}^4$ è sicuramente un multiplo di 3."
- Diana afferma: "Per ogni intero $0 \leq k \leq 2021$ sicuramente esistono due indici $1 \leq i, j \leq 2021$ tali che la quantità $x_i^3 + x_j^3 + k$ sia un multiplo di 3."

Chi ha ragione?
(A) Tutti tranne Benito **(B)** Anastasia e Ciccio **(C)** Anastasia e Diana **(D)** Solo Diana **(E)** Benito e Ciccio

2. Sia ABC un triangolo in cui $AB = 7, BC = 8, CA = 9$ e sia M il punto medio di BC. La circonferenza circoscritta al triangolo ACM incontra la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAM}$ nel punto X, distinto da A. Determinare il coseno dell'angolo $\widehat{BXC}$.
(A) $-\frac{7}{16}$ **(B)** $-\frac{11}{21}$ **(C)** $-\frac{2\sqrt{5}}{7}$ **(D)** $-\frac{13}{16}$ **(E)** $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

3. Una moneta si trova nella cella in alto a sinistra di una griglia 5×4. Una mossa consiste nel muovere questa moneta di un quadratino in alto, a destra, a sinistra, o in basso, sempre restando all'interno della griglia. Sia N il numero di sequenze formate da 9 mosse che portano la moneta nel quadratino in basso a destra. Quale tra questi è il più grande primo che divide N?
(A) 7 **(B)** 17 **(C)** 19 **(D)** 23 **(E)** 31

4. Sia $P(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi di grado 2021, tale che $0 < |p(0)| < 2$, avente solo radici intere. Pippo, Pluto e Paperino pronunciano le seguenti affermazioni.

- Pippo afferma: La somma algebrica dei coefficienti di $p(x)$ è sicuramente una potenza di 2.
- Pluto afferma: Esiste certamente un numero reale λ tale che $p(\lambda) = 2021$.
- Paperino afferma: Il coefficiente di x^{2019} può essere nullo, ma non è detto che lo sia.

Chi ha ragione?
(A) Solo Paperino **(B)** Pluto e Paperino **(C)** Nessuno **(D)** Solo Pluto **(E)** Pluto e Pippo
NB: Un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice monico se $a_n = 1$.

5. Stabilire qual è l'ultima cifra a destra, non nulla, del numero 2021!.
(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 8

6. Sia M la migliore costante reale tale che per ogni quintupla di numeri reali a, b, c, d, e valga:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq M(ab + bc + cd + de)$$

Quali dei seguenti numeri è intero?
(A) $\sqrt{2M^2}$ **(B)** $\sqrt{3M^2}$ **(C)** $3M$ **(D)** $4M$ **(E)** $4M^2$

7. Di un triangolo per i cui vertici A, B, C passa una circonferenza ω sappiamo che gli angoli in A, B, C valgono rispettivamente $78°, 70°, 32°$. Sul lato BC si prendano due punti distinti X, Y tali che $\widehat{BAX} = 36°$. Sia $K \neq A$ l'intersezione tra la retta AY e ω. La retta BK è tangente alla circonferenza circoscritta al triangolo ABX. Determinare l'ampiezza di $\widehat{AYB}$.
(A) 66° **(B)** 70° **(C)** 69° **(D)** 71° **(E)** 68°

8. Enzo considera i quattro più piccoli numeri interi positivi distinti p, q, r, s che soddisfano $p^2 = q^3 = r^4 = s^5$. Esistono degli interi positivi $M > 1$ tali che $\sqrt[2021]{p \cdot q \cdot r \cdot s^M}$ sia un numero intero. Quale tra questi è un possibile valore per M?
(A) Un siffatto M non esiste **(B)** $M = 161$ **(C)** $M = 162$ **(D)** $M = 163$ **(E)** $M = 164$

9. Sia $P(x)$ un polinomio monico di terzo grado a coefficienti reali tale che le sue radici a, b, c soddisfino l'uguaglianza $\frac{-(a+b)(b+c)(c+a)}{2022} = abc = 2021$. Qual è il valore minimo possibile che può assumere $|P(1)|$?
(A) 2023 **(B)** 2021 **(C)** 2020 **(D)** 2022 **(E)** 2024

10. Definiamo una sequenza tale che $T_0 = 1$ e $T_n = \frac{(n+1)! \cdot T_{n-1}}{n! + (n+1) \cdot T_{n-1}}$, dove $n \geq 1$. Il valore di T_{2021} può essere espresso nella forma $\frac{2022!}{m}$, dove m è un intero positivo. Qual è la somma dei fattori primi distinti di m?
(A) 364 **(B)** 340 **(C)** 90 **(D)** 198 **(E)** 2022

11. Mario, Luigi, Wario e Waluigi discutono di tutte le coppie di interi (m, n) tali che $m + n$ divida mn. Poi pronunciano le seguenti affermazioni. Chi ha ragione?

- Mario afferma: "Se n è una potenza di 2, il numero di interi m che soddisfano tale relazione è dispari."
- Luigi afferma: "Fissato un intero positivo k, accade per esattamente 44 interi positivi $k \leq 2021$ che il numero di interi m tali che $m + k \mid mk$ sia un quadrato perfetto."
- Wario afferma: "Esistono infiniti interi positivi n tali che il numero di interi m tali che $m + n \mid mn$ è un multiplo di 4."
- Waluigi afferma: "Se m, n sono interi tali che $m + n$ divida mn e m è un cubo perfetto maggiore di 1, n sicuramente non può essere un cubo perfetto maggiore di 1."

(A) Tutti tranne Waluigi **(B)** Wario e Luigi **(C)** Nessuno **(D)** Wario e Waluigi **(E)** Wario e Mario

12. Sia M il numero di anagrammi di $TESTINIZIALE$ tali che per ogni $1 \leq k \leq 12$, il numero di vocali nelle prime k lettere è maggiore o uguale al numero delle consonanti. Quale di questi numeri divide M?
(A) 325 **(B)** 512 **(C)** 750 **(D)** 441 **(E)** 704

13. Siano z_1, z_2, z_3 numeri reali verificanti le relazioni in basso.

$$\frac{1}{z_1 + z_2 + z_3} = z_1 z_2 + \frac{5}{z_3} = z_2 z_3 + \frac{6}{z_1} = z_3 z_1 + \frac{3}{z_2}$$

Definiamo inoltre $S = z_1 z_2 z_3$. Determinare quale affermazione è vera.
(A) $27S^2 \in \mathbb{Z}$ **(B)** $13S^2 \in \mathbb{N}$ **(C)** S non è univocamente determinata. **(D)** $169S^3 \in \mathbb{Z}$ **(E)** Ci sono più affermazioni vere.

14. Sia ABC un triangolo acutangolo di ortocentro H e circocentro O. Sia D il punto sulla retta HO tale che $\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$. Sapendo che $\widehat{BOC} = \widehat{BDC}$, qual è l'ampiezza di $\widehat{BAC}$?
(A) Non è univocamente determinata **(B)** 60° **(C)** 72° **(D)** 75° **(E)** 80°

15. Denotiamo con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera del numero reale x. Un intero positivo n si dice *leccese* se esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che $n = \lambda \cdot \lfloor \lambda \rfloor$. Quanti sono gli interi positivi leccesi, minori o uguali a 2021?
(A) 2016 **(B)** 44 **(C)** 1010 **(C)** 1849 **(E)** Nessuna delle precedenti

16. Alessandro, Aldo, Alberto e Alfredo discutono sulle tassellazioni di certi poligoni.

- Alessandro afferma: "È sempre possibile tassellare un triangolo equilatero di lato n con dei triangoli equilateri di lato k, se k è un divisore di n."
- Aldo afferma: "È sempre possibile tassellare un quadrato di lato n con dei quadrati di lato k, se k è un divisore di n."
- Alberto afferma: "È sempre possibile tassellare un esagono regolare di lato n con degli esagoni regolari di lato k, se k è un divisore di n."
- Alfredo afferma: "È possibile tassellare un rettangolo $m \times n$ con dei rettangoli $j \times k$ e $k \times j$, se e solo se j e k sono entrambi divisori sia di m che di n."

Quante di queste affemazioni sono corrette, sapendo che m, n, j, k sono interi positivi?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

17. Sia ABC un triangolo e P un punto variabile sul lato BC. Chiamiamo X, Y i simmetrici di P rispetto ai lati AB, AC: i punti X, A, Y sono allora allineati. Sapendo che l'area di ABC è la massima possibile e $\widehat{XPA} = \widehat{YPA}$, trovare il rapporto tra l'area di PXY e l'area di ABC.
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** 1

18. In occasione dell'apertura di un negozio di caramelle, tale negozio ha messo a disposizione 100 caramelle da regalare a cinque clienti $C_1, C_2, \ldots, C_5$ nel modo seguente: ogni cliente C_i, a partire dal primo, considera tutti gli interi positivi minori o uguali al numero di caramelle finora rimasto che sono congrui a i modulo 5. Il cliente in questione sceglie un numero appartenente a tale insieme e preleva la quantità di caramelle corrispondenti. Ad esempio, il primo cliente potrà scegliere di prendere $1, 6, 11, \ldots, 91, 96$ caramelle. A fine inaugurazione, i gestori del negozio si sono resi conto che il numero di caramelle non riscosso dai clienti è ≥ 35. Chiamiamo M il numero di modi in cui i clienti possono aver deciso di prelevare le caramelle. Si determini il più grande numero primo che divide M.
(A) M è primo **(B)** 2 **(C)** 7 **(D)** 13 **(E)** 23

19. Dato un intero positivo $M \geq 2$, definiamo:

$$f(M) = \prod_{n=2}^{M} (n^8 - 3n^6 + 4n^4 - 3n^2 + 1)$$

Che resto si ottiene quando $f(99)$ viene diviso per 101?
(A) 16 **(B)** 70 **(C)** 54 **(D)** 0 **(E)** 81

20. Homer, Bart e Lisa discutono di un triangolo ABC con $AB \neq AC$, avente ortocentro H e circocentro O. In particolare, in questo triangolo accade che $\widehat{AHO} = 90°$. Poi pronunciano le seguenti affermazioni:

- Homer afferma: "Chiamo M, N i punti medi di AC, BC. Allora i punti M, H, N sono allineati se e solo se l'angolo in B vale $45°$."
- Bart afferma: "Se chiamo β, γ rispettivamente gli angoli in B, C allora si ha sempre $\tan(\beta)\tan(\gamma) \leq 2\sqrt{3}$."
- Lisa afferma: "Il quadrilatero $BHOC$ può essere ciclico."

Chi ha ragione?
(A) Homer e Bart **(B)** Nessuno **(C)** Bart e Lisa **(D)** Solo Lisa **(E)** Solo Bart