## I TETRATHLON MATEMATICO

Round 1 - Algebra Durata 20 minuti + 5 minuti di tempo per inserimento

## Problemi da 1 punto

- 1. Siano m,n numeri interi tali che  $m^2 + n^2 = 1$ . Determinare il valore di mn.
- 2. Sia x un numero reale. Stabilire la verità o la falsità delle seguenti affermazioni.
- i) Vale  $x^2 < x$  se 0 < x < 1.
- ii) Vale  $x^2 < x$  se e solo se 0 < x < 1
- iii) Se  $x^2 > x$  allora x > 1.

Formattare la risposta nel seguente modo: indicare "1" se si ritiene un'affermazione vera e "0" se si ritiene che essa sia falsa per ogni domanda. Ad esempio, se si pensa che siano tutte false tranne la 2, dare come risposta 010.

3. Siano a,b,c numeri reali con  $a \neq 0$ . Considerato il polinomio  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , sappiamo che esiste un numero reale k tale che p(k) > p(r) per ogni numero reale  $r \neq k$ .

Quanti sono al massimo i coefficienti reali positivi di p(x)?

- 4. Determinare il minimo valore che può assumere l'espressione  $\frac{2020x}{y} + \frac{y}{2020x}$  sapendo che x, y sono reali positivi tali che x + y = 2020.
- 5. Sia  $p(x) = x^2 20x + k$ . Sapendo che le radici di p(x) sono tutte intere e positive, quanto vale come minimo k?

## Problemi da 2 punti

- 6. x, y sono dei numeri eventualmente complessi che soddisfano  $x^2y + xy^2 = 18$  e (x + 1)(y + 1) = 10. Determinare quanto vale al massimo  $x^2 + y^2$ .
- 7. Detto R(x) il polinomio ottenuto come resto dopo la divisione tra il polinomio  $x^{2020} + 1$  e  $x^2 + 1$ , determinare il valore di R(10).
- 8. Determinare quanti sono i coefficienti multipli di 2 nel polinomio futuristico:

$$F(x) = (x - 2020)(x - 2021)(x - 2022)(x - 2023) \dots (x - 2029)(x - 2030)$$

Attenzione: Per coefficienti si intendono anche eventuali valori nulli che moltiplicano  $x^k$  con  $0 \le k \le 11$ .

- 9. Calcolare la somma infinita  $\frac{1}{2020} + \frac{2}{2020^2} + \frac{3}{2020^3} + \cdots$ . Dopo aver ridotto la frazione ai minimi termini, dare come risposta le ultime 4 cifre del denominatore.
- 10. Nel polinomio p(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) quanto vale il coefficiente di quarto grado?

## Problemi da 3 punti

- 11. Siano x, y, z numeri reali tali che 3x + 4y + 5z = 50. Determinare il minimo valore che può assumere  $x^2 + y^2 + z^2$ .
- 12. Quanti sono gli interi m tali che  $1 < 2020^{\frac{m}{2020}} < 2$ ?
- 13. Definiamo la successione di Fibonacci come  $F_1=1$ ,  $F_2=1$ ,  $F_k=F_{k-1}+F_{k-2}$  per ogni  $k\geq 3$ . Considerato il polinomio  $P(x)=(x-F_1)(x-F_2)(x-F_3)\dots(x-F_{10})=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\dots+a_1x+a_0$ , che resto si ottiene dividendo  $a_8$  per 10?
- 14. Sia  $p(x) = x^5 + 1007x^3 2x^2 3030x 2020$ . Determinare la somma delle potenze quinte delle sue radici reali.
- 15. M è definito come il minimo della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$$

Al variare di x nell'insieme dei numeri reali. Determinare  $M^4$ .

Ti invito a consultare il sito <u>matteosalicandro.altervista.org</u> per restare sempre informato sulle nuove gare organizzate!

Se ti va di sostenermi, puoi effettuare una donazione al link <a href="https://www.paypal.me/MSalicandro">https://www.paypal.me/MSalicandro</a>, mi impegnerò a proporre gare più spesso! Ti ringrazio!