I TETRATHLON MATEMATICO

Round 2 - Combinatoria
Durata 20 minuti + 5 minuti di tempo per inserimento

Problemi da 1 punto

1. In un sacchetto ci sono un certo numero di palline rosse e un certo numero di palline blu, tutte di dimensioni identiche. Qual è la probabilità di estrarre una pallina blu sapendo che il numero di palline blu è il triplo del numero di palline rosse?
Dai come risposta il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

2. Diciamo che un numero intero positivo n è *bipotente* se esistono due interi non negativi distinti a, b tali che $n = 2^a + 2^b$.
Quanti sono gli interi positivi bipotenti minori o uguali a 2020?

3. Alfa sfida Beta al seguente gioco: partono da una pila di 2020 monete, ad ogni mossa, il giocatore a cui tocca, preleva una certa quantità k di monete in modo tale che la somma delle cifre di k sia uguale alla somma delle cifre delle monete rimaste sul tavolo al suo turno, ma non può prelevarle tutte, tranne in questo caso: se rimangono meno di 10 monete sul tavolo, il giocatore a cui tocca le deve prendere necessariamente tutte. Chi raccoglie l'ultima moneta perde. Inizia Alfa.
Se Alfa ha una strategia vincente, dire quante monete può prelevare al massimo per assicurarsi la vittoria.
Se Alfa non ha una strategia vincente, dare come risposta 0.

4. Quanti sono i numeri di 6 cifre distinte composti dalle cifre $\{1,2,3,4,5,6\}$ tale che il prodotto delle prime 3 cifre sia dispari e il prodotto delle ultime 3 sia pari?

5. Quanti sono i quadrati perfetti che dividono 2020^2?

Problemi da 2 punti

6. In quanti modi si possono mettere in fila gli interi da 1 a 7 in modo che la somma di due interi consecutivi sia sempre dispari?

7. Dato un intero positivo k, eseguiamo le seguenti operazioni:
i) Se k è pari, lo divido per 2
ii) Altrimenti sottraggo 1.
Se arrivo a 1, mi fermo.
Se $1 \leq k \leq 10000$, qual è il più grande valore di k per il quale accade che il numero di operazioni da eseguire è il massimo possibile, nell'intervallo $[1,10000]$?

8. Ho a disposizione 3 palline rosse, 2 palline bianche e 2 palline blu. Le dispongo casualmente. Qual è la probabilità che ci siano 2 palline bianche o 2 palline blu consecutive?
Dai come risposta somma di numeratore e denominatore della frazione, ridotta ai minimi termini.

9. Quanti sono gli anagrammi di **MATITA** che iniziano e terminano per vocale?

10. Determinare il numero di sottoinsiemi di tre elementi distinti di $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ tali che esattamente un elemento sia la media aritmetica degli altri due.

Problemi da 3 punti

11. Sigismondo gioca al seguente gioco. Disegna su una lavagna 2020 quadratini $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{2020}$ e scrive in ogni quadratino Q_i un numero intero m_i a scelta tra -1 e 1, estremi inclusi. Successivamente calcola la somma di tutti i prodotti del tipo $m_i m_j$ con $1 \leq i < j \leq 2020$. Detta S_{max} la somma massima che può ottenere e S_{min} la somma minima che può ottenere Sigismondo, calcola $S_{max} + S_{min}$.

12. Calcolare

$$\sum_{k=0}^{7} (2k+1) \binom{7}{k}^2$$

13. Quanti deltoidi si possono individuare in un 20-agono regolare?

14. Quanti sono gli interi $k < 10^6$ tale che k è divisibile per 7 ed è composto, in base 10, solo dalle cifre "1" o "0" o "9"?

15. Su una scacchiera 6x6 sono scritti i numeri interi da 1 a 36 senza ripetizioni in modo tale che due numeri consecutivi si trovino sempre in due caselle adiacenti per un lato. Quanti numeri primi possono esserci al massimo in una riga?

Ti invito a consultare il sito matteosalicandro.altervista.org per restare sempre informato sulle nuove gare organizzate!
Se ti va di sostenermi, puoi effettuare una donazione al link https://www.paypal.me/MSalicandro, mi impegnerò a proporre gare più spesso! Ti ringrazio!