I TETRATHLON MATEMATICO

Round 4 - Teoria dei Numeri
Durata 20 minuti + 5 minuti di tempo per inserimento

Problemi da 1 punto

1. Determinare il più piccolo primo p tale che p non divida nessuno degli interi:
$3^1+2,\ 3^2+2,\dots,3^n+2$ per ogni $n \le 2020$.

2. Con quanti zeri termina $mcm(2020^{2020}, 2021^{2020})$?

3. Siano a, b numeri interi tali che $|ab| = 2020$. Determinare quanto può valere al massimo $a-b$.

4. Determinare quanti sono i multipli positivi di 101, non maggiori di 2020 la cui cifra delle unità è pari.

5. Qual è il più piccolo intero positivo maggiore di 100 avente esattamente 8 divisori interi positivi?

Problemi da 2 punti

6. Diciamo che una sequenza di n interi positivi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ è detta k-bella se per ogni $1 \le i \le n-1$ il numero $\overline{a_i a_{i+1}}$ è divisibile per k e $1 \le a_i \le 9$ per ogni i. Ad esempio 14984 è 7-bella.
La somma di una sequenza è data da $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$.
Trovare il massimo valore che può assumere la somma di una sequenza 13-bella di lunghezza 2020, considerate tutte le sequenze siffatte.

7. Quante sono le coppie ordinate di numeri primi (p, q) tali che p^2+q^2 sia un quadrato perfetto?

8. Determinare il massimo valore che può assumere il prodotto xy sapendo che x, y sono interi positivi tali che $xy+x+y=2020$.

9. Un intero positivo b si dice *elevato* se esiste un intero positivo a che verifica
$$a^b = 2^{2020}$$

Determinare la somma di tutti gli interi positivi elevati.

10. Quanti sono gli interi positivi k tali che $f(k) = \frac{2020!}{k!}$ non è divisibile per 343?

Problemi da 3 punti

11. Determinare, se esiste, il più piccolo intero positivo K tale che i numeri $49K$ e $27K$ abbiano lo stesso numero di divisori interi positivi. Dare come risposta 0 se si pensa che tale K non esista.

12. Determinare il più piccolo intero positivo C tale che valga $\lfloor\sqrt{C}\rfloor = \lfloor\sqrt{C+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{C+2}\rfloor = \lfloor\sqrt{C+3}\rfloor = \dots = \lfloor\sqrt{C+69}\rfloor$.
Ricordiamo che il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x.

13. Consideriamo il numero $N = 10 \cdot 3^{4045} \cdot 49^{1010}$. Considerata la rappresentazione di N in base 4, quali sono le sue ultime tre cifre?

14. Voglio partizionare l'insieme dei numeri interi in K sottoinsiemi disgiunti, facendo in modo che in ogni sottoinsieme, la differenza tra due elementi di tale sottoinsieme non sia mai un numero primo. Quanto vale come minimo K?

15. Siano m, n numeri interi. Risolvere $m - m^3n = 21 - m^2n^2$ e calcolare la somma dei valori assoluti di tutti i possibili prodotti mn.

Ti invito a consultare il sito matteosalicandro.altervista.org per restare sempre informato sulle nuove gare organizzate!
Se ti va di sostenermi, puoi effettuare una donazione al link https://www.paypal.me/MSalicandro, mi impegnerò a proporre gare più spesso! Ti ringrazio!