Flussi di coscienza in geometria

Matteo Salicandro

Premessa Quante volte, nella risoluzione di un problema, ci siamo trovati davanti ad una situazione in cui non sapevamo come procedere? È indubbiamente una situazione opprimente, che spesso causa dentro di noi un desiderio implacabile di cercare la soluzione al problema in questione. E quando si cerca questa soluzione, spesso si trova una soluzione *oneliner* e ci si sente stupidi. In realtà, esistono soluzioni lunghe a problemi facili e soluzione corte a problemi difficili. La lunghezza di una soluzione non influisce sulla difficoltà reale di un problema. Dietro ad una soluzione corta, potrebbe esserci un *flusso di coscienza* alquanto lungo.

Obiettivo L'obiettivo di questo paper è condividere tali flussi di coscienza, per invitare a cercare nuovi modi di ragionare. I problemi che verranno presi in esame sono alcuni dei dimostrativi di geometria della Gara di Febbraio che, a mio modesto parere, sono molto istruttivi... cioè quelli degli anni $2010, 2018, 2019$.

Gara di Febbraio 2010 - Problema 16 (Testo) È dato un triangolo acutangolo isoscele ABC di base AC. All'interno di tale triangolo sono dati un punto M, dalla parte di C rispetto all'asse di AC e tale che $\widehat{CMA} = 2\widehat{CBA}$, e un punto N all'interno del segmento AM tale che $\widehat{BNM} = \widehat{CBA}$.
(a) Dimostrare che $\widehat{CBN} = \widehat{BAM}$.
(b) Dimostrare che $CM + MN = BN$.

Flusso di coscienza Uff... nessun triangolo decente coinvolge l'angolo $\widehat{CBN}$ e $\widehat{BNM}$, io quindi prolungherei AM fino a intersecare BC nel punto X. Vediamo un po'... BNX ha degli angoli belli... allora, $\widehat{BNX} = \widehat{ABC}$ e poi $\widehat{BXN} = \widehat{BXA}$ per allineamento... olè! Ci sono due triangoli simili! BNX e ABX sono simili, quindi posso dire anche $\widehat{NBX} = \widehat{BAX}$... Grazie X, come farei se non ci fossi stato! Quindi posso dire $\widehat{CBN} = \widehat{BAM}$, che è quello che volevo... quindi il punto (a) è chiuso.
Per il punto (b), di sicuro, se prndo il circocentro O di ABC allora $AOMC$ è ciclico. Ma a che serve?! E soprattutto, come diavolo dimostro una somma di segmenti? Aspe, in un triangolo isoscele gli angoli sono $\theta, \theta, 180 - 2\theta$... quindi prolungo CM, lo interseco con BN in Y e qualcosa di interessante magari si trova... allora, io $\widehat{ABC}$ lo chiamo β, quindi $\widehat{AMC} = 2\beta$ e di conseguenza $\widehat{YMN} = 180° - 2\beta$, però nel punto (a) avevo detto che $\widehat{BNX} = \widehat{ABC} = \beta$... uh, che bello! MNY è isoscele quindi $CM + MN = CM + MY = CY$. Ok, ora devo dire che $CY = BN$ in qualche modo... segmenti distanti, collegati male... se non trovo una coppia di triangoli congruenti non ne esco più. Triangoli decenti che hanno CY e BN come lati ce ne sono? Preferibilmente con angoli noti e belli. BCY e ABN hanno buone probabilità di esserlo, del resto abbiamo anche $AB = AC$ e altri triangoli più belli che contengono CY non esistono. Ok, di certo sono simili perché per il punto (a) abbiamo detto che $\widehat{BAN} = \widehat{CBY}$ e inoltre avremo dato che quel triangolino è isoscele $\widehat{ANB} = \widehat{BYC}$ ma aspe' siccome $AB = AC$ allora quei due sono effettivamente congruenti e ok, $BN = CY$ quindi è chiuso.

Gara di Febbraio 2018 - Problema 17 (Testo) Sia ABC un triangolo e P un suo punto interno. Sia H il punto sul lato BC tale che la bisettrice dell'angolo $\widehat{AHP}$ è perpendicolare alla retta BC. Sapendo che $\widehat{ABC} = \widehat{HPC}$ e $\widehat{BPC} = 130°$, determinare la misura dell'angolo $\widehat{BAC}$.

Flusso di coscienza Uhm... allora, il fatto che la bisettrice di $\widehat{AHP}$ sia perpendicolare a BC mi dà tanti angoli uguali... infatti se io chiamassi $\widehat{AHP} = \theta$ allora $\widehat{AHB} = \widehat{PHC} = 90 - \theta/2$, ma mi sa che non serve a nulla... però come sfrutto il fatto che l'angolo $\widehat{HPC}$ è uguale all'angolo in B? Oddio, aspe', mi sa che ABH e HPC sono simili, perché $\widehat{ABH} = \widehat{HPC}$ e $\widehat{AHB} = \widehat{PHC}$. Io quindi potrei dire che $BH : BA = PH : PC$ ma no, non mi porta a nulla... ho solo rapporti strani. Però anche BHP e AHC sono simili, già un angolo in comune ce l'hanno... se dimostrassi che $BH : HP = AH : CH$ avrei finito. Oh, ABH e CPH sono ordinatamente simili, però. Quindi $BH : PH = AH : CH$ e sì, torna tutto quindi anche BHP e AHC sono simili! Ok, ora accade che $\widehat{BPH} = \widehat{ACH}$ che per allineamento è uguale a $\widehat{BCA}$. Ma aspetta, $\widehat{BPC}$ quindi è uguale all'angolo in C (per la parte di $\widehat{HPC}$) più l'angolo in B (per la parte di $\widehat{HPB}$) quindi sarà 180 meno l'angolo in A... ok, è chiuso. $\widehat{BPC}$ è il supplementare di $\widehat{BAC}$ quindi la risposta è $50°$.

Gara di Febbraio 2019 - Problema 16 (Testo) Sia ABC un triangolo isoscele su base BC e siano D, E punti sui lati AB, BC rispettivamente, tali che le rette DE e AC risultino parallele. Si consideri inoltre il punto F sulla retta DE che si trova dalla parte opposta di D rispetto ad E ed è tale che FE sia congruente ad AD. Detto O il circocentro del triangolo BDE dimostrare che i punti O, F, A, D giacciono su una circonferenza.

Flusso di coscienza A me avevano detto che tutti i geometrici di febbraio vengono in angle chasing, come sfrutto il fatto che $FE = AD$? Di sicuro qualche triangolo congruente va trovato, da qualche parte. Intanto se DE e AC sono parallele allora BDE e BAC sono chiaramente simili... e ok, il circocentro di BDE ci dice che $OB = OD = OE$. E già due candidati lati ce li abbiamo... Intanto $FE = AD$. Poi $OD = OE$, ok ODA e OEF sembrano davvero tanto congruenti... speriamo che l'angolo in mezzo sia lo stesso. Allora io chiamo $\widehat{BAC} = \widehat{BDE} = 2\alpha$, anche BDE è isoscele quindi DO è bisettrice, in definitiva $\widehat{ODA} = 180 - \alpha$, ma DOE per ovvi motivi è isoscele quindi $\widehat{ODE} = \widehat{OED} = \alpha$ ma il supplementare di $\widehat{OED}$ è ancora una volta $180 - \alpha$, ok, ok, molto bello. Quindi ODA e OEF sono congruenti... in definitiva questo ci dà tante informazioni tra cui $\widehat{OFE} = \widehat{OFD} = \widehat{OAD}$, oddio, $ODAF$ è ciclico, quindi è chiuso.

Matteo Salicandro
e-mail: mattysalmathraces@gmail.com
sito web: matteosalicandro.altervista.org