Verso la gara provinciale!

Matteo Salicandro
matteosalicandro.altervista.org
mattysalmathraces@gmail.com

Settimana 1 (01/12/2021-08/12/2021)

1. Trovare tutte le coppie (m, n) di numeri interi tali che $m^3 + n = 524$ e $m + n^3 = 1736$.

Soluzione: Sommiamo le due uguaglianze, otteniamo quindi $m^3 + n^3 + m + n = 2260$, da cui troviamo che $(m + n)(m^2 - mn + n^2) + (m + n) = 2260$ e $(m + n)(m^2 - mn + n^2 + 1) = 2260$. Di conseguenza $m + n \mid 2260$, di conseguenza $m + n$ potrà valere in valore assoluto $1, 2, 4, 5, 10, 20, 113, 226, 452, 565, 1130, 2260$. Ora $m^3 + n - (m + n) = m^3 - m = m(m - 1)(m + 1)$. Se io considero $f(m) = m(m - 1)(m + 1)$ posso impostare la disuguaglianza $524 - 2260 \leq f(m) \leq 524 + 2260$ da cui $-12 \leq m \leq 14$.
Inoltre $1736 - m = n^3$ è un cubo perfetto da cui si trova che $1722 \leq n^3 \leq 1750$, cioè n può essere solo 11 o 12. Per $n = 11$ ottengo $m^3 = 511$, che non è un cubo perfetto, per $n = 12$ ottengo $m^3 = 512 = 8^3$, da cui ricavo l'unica coppia $(m, n) = (8, 12)$ che rispetta anche l'altra uguaglianza perché $8 + 12^3 = 1736$.