Verso la gara provinciale!

Matteo Salicandro
matteosalicandro.altervista.org
mattysalmathraces@gmail.com

Settimana 3 (15/12/2021-22/12/2021)

3. Siano n, k interi positivi con $n > k$. Una parola *palindroma* è una parola che può essere letta allo stesso modo sia da sinistra verso destra che da destra verso sinistra. Ad esempio RADAR è una parola palindroma. Giacomo possiede la parola:

$$\underbrace{AAAAA\ldots AAA}_{\text{n volte "A"}}$$

Giacomo può prendere k lettere consecutive della parola e trasformare le A in B, o le B in A, può ripetere questa operazione un numero infinito di mosse. Vince se riesce a rendere la parola finale una parola palindroma diversa da quella di partenza. Ad esempio, per $n = 4, k = 3$ lui può vincere applicando le seguenti mosse: $AAAA \longrightarrow ABBB \longrightarrow BAAB$, dove la prima mossa consisteva nel modificare le ultime k lettere, la seconda consisteva nel modificare le prime k lettere.
Per quali coppie (n, k) Giacomo è in grado di vincere?

Soluzione: La risposta è: per ogni scelta di (n, k) con $n > k$. Dimostreremo che il seguente algoritmo funziona; denotiamo quindi con a_i l'i-esima lettera della parola. Applico la mossa sulle sotto-parole del tipo $[a_1a_2\ldots a_k], [a_2a_3\ldots a_{k+1}], [a_3a_4\ldots a_{k+2}], \ldots, [a_{n-k+1}a_{n-k+2}\ldots a_n]$. Si ha quindi che a_1 e a_n sono state "toccate" lo stesso numero di volte, così come a_2 e a_{n-1}, ma anche a_3 e a_{n-2}... e così via. Di conseguenza, siccome la parola iniziale era palindroma, anche la parola finale lo è, per qualsiasi scelta di n e k.